Exo 1 :

Soit $E \neq \emptyset$

1. Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $A \neq E$, déterminer $\mathcal{B}(\{A\})$

$$\mathcal{C} = \{A, \emptyset, E, A^c\} \subset \mathcal{B}(\{A\})$$

Réciproquement, si on montre que $\mathcal{C}$ est une tribu, comme $\{A\} \subset \mathcal{C}$ et que $\mathcal{B}(\{A\})$ est la plus petite tribu contenant $\{A\}$, on aura $\mathcal{B}(\{A\}) \subset \mathcal{C}$.

D'où l'égalité

- $\emptyset \in \mathcal{C}$
- $A^c \in \mathcal{C}$, $\emptyset^c = E \in \mathcal{C}$, $E^c = \emptyset \in \mathcal{C}$, $(A^c)^c = A \in \mathcal{C}$.
  => il y a stabilité par complémentaire.
- à 2 elts : $A \cup \emptyset = A \in \mathcal{C}$, $A \cup E = E \in \mathcal{C}$, $A \cup A^c = E \in \mathcal{C}$
  $\emptyset \cup E = E \in \mathcal{C}$, $\emptyset \cup A^c = A^c \in \mathcal{C}$
  $E \cup A^c = E \in \mathcal{C}$

  à 3 elts : $A \cup \emptyset \cup E = E \in \mathcal{C}$
  $A \cup \emptyset \cup A^c = E \in \mathcal{C}$
  $A \cup E \cup A^c = E \in \mathcal{C}$
  $\emptyset \cup E \cup A^c = E \in \mathcal{C}$

  à 4 elts : $A \cup \emptyset \cup E \cup A^c = E \in \mathcal{C}$

  => il y a stabilité par réunion dénombrable
  (ici réunion finie car la famille est finie.)

↳ $\mathcal{C}$ est bien une tribu

On a alors $\boxed{\mathcal{B}(\{A\}) = \{A, \emptyset, E, A^c\}}$

Remarque : $A \cup A^c = E$: partition de E
↳ réunion de parties 2 à 2 disjointes

2. Posons $F = \{A, B, C\}$ avec $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$
et $A \cup B \cup C = E$ (partition)

Cherchons $\mathcal{B}(F)$

Posons $\mathcal{C} = \{A, B, C, \emptyset, E, A^c, B^c, C^c\}$

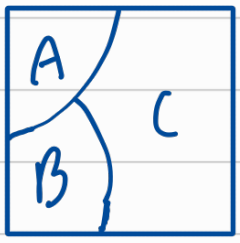
Comme précédemment, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(F)$.

Alors, si on montre, réciproquement, que $\mathcal{C}$ est une tribu, comme $F \subset \mathcal{C}$ (par construction), alors $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{C}$ d'où l'égalité.

- $\emptyset \in \mathcal{C}$

- $A^c \in \mathcal{C}$, $B^c \in \mathcal{C}$, $C^c \in \mathcal{C}$. $\emptyset^c = E \in \mathcal{C}$, $E^c = \emptyset \in \mathcal{C}$, $(A^c)^c = A \in \mathcal{C}$
$(B^c)^c = B \in \mathcal{C}$, $(C^c)^c = C \in \mathcal{C}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire.

- On remarque que $A \cup B = C^c \in \mathcal{C}$, $A \cup C = B^c \in \mathcal{C}$, $B \cup C = A^c \in \mathcal{C}$

car 

et que $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \emptyset^c = E \in \mathcal{C}$
(Loi de Morgan)

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ est stable par réunion dénombrable (donc finie car $\mathcal{C}$ est

finie)

↳ $\mathcal{C}$ est une tribu, ainsi on a

$$\boxed{\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{A, B, C, \emptyset, E, A^c, B^c, C^c\}}$$

Remarque :

Soit $E = A_1 \cup \dots \cup A_n$ une partition avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \neq \emptyset$

si $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\}$,

$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{ \emptyset, \longrightarrow C_n^0 = 1$

$A_1, \dots, A_n, \longrightarrow C_n^1 = n$

$A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, \dots, A_{n-1} \cup A_n, \longrightarrow C_n^2$

$\vdots$

$A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}, \dots, A_2 \cup \dots \cup A_n, \longrightarrow C_n^{n-1} = n$

$A_1 \cup \dots \cup A_n = E \} \longrightarrow C_n^n = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Card}(\mathcal{B}(\mathcal{F})) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}))}$$

3. Sur $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{F} = \{[0,1[, [1,2],]2,3]\}$

Déterminer $\mathcal{B}(\mathcal{F})$

Clairement, $\underbrace{\underbrace{([0,1[\cup [1,2] \cup]2,3])^c}_{\in \mathcal{B}(\mathcal{F})}}_{\in \mathcal{B}(\mathcal{F})} = \mathbb{R} \setminus [0,3]$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{F}})$ avec $\tilde{\mathcal{F}} = \{[0,1[, [1,2],]2,3], \mathbb{R}_{\setminus [0,3]}\}$

car $\mathcal{F}$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$
or, $\tilde{\mathcal{F}}$ est une partition de $\mathbb{R}$ à 4 elts $\Rightarrow \text{Card}(\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{F}})) = 2^4$
$\Rightarrow \boxed{\text{Card}(\mathcal{B}(\mathcal{F})) = 2^4}$

$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{ \emptyset \longrightarrow C_4^0 = 1$
$[0,1[, [1,2],]2,3], \mathbb{R}_{\setminus [0,3]}, \longrightarrow C_4^1 = 4$
$[0,2], [0,1[\cup]2,3], \mathbb{R}_{\setminus [1,3]}, [1,3], \mathbb{R}_{\setminus [0,1[\cup]2,3]}, \mathbb{R}_{\setminus [0,2]}, \longrightarrow C_4^2 = 6$
$[0,3], \mathbb{R}_{\setminus]2,3]}, \mathbb{R}_{\setminus [1,2]}, \mathbb{R}_{\setminus [0,1[}, \longrightarrow C_4^3 = 4$
$\mathbb{R} \} \longrightarrow C_4^4 = 1$

Exo 2 :

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, soit $A \subset X$.

Montrons que $A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \chi_A : (X, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\mathcal{G}_{\mathbb{R}})$
($\chi_A = \mathbb{1}_A$)
$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\Leftarrow$ $A = \chi_A^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}})$ car $\{1\} = \underbrace{\mathbb{R}_{\setminus]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[}}_{\in \mathcal{G}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \chi_A$ mes $\in \mathcal{B}$
$\Rightarrow A \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ Supposons que $A \in \mathcal{B}$, soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
montrons que $\chi_A^{-1}(B) \in \mathcal{B}$

- soit ni 0, ni 1 ne sont dans B, auquel cas $\chi_A^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{B}$
- soit $1 \in B$ et $0 \notin B$, $\chi_A^{-1}(B) = A \in \mathcal{B}$ par hypothèse

- soit $1 \notin B$ et $0 \in B$, $\chi_A^{-1}(B) = A^c \in \mathcal{B}$ de même

- soit $1 \in B$ et $0 \in B$, $\chi_A^{-1}(B) = X \in \mathcal{B}$

Exo 3 :

Montrons que $f : (X, \mathcal{B}_X) \to (Y, \mathcal{B}(\mathcal{A}))$ est mesurable
$\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X$

$\boxed{\Rightarrow}$ évident

$\boxed{\Leftarrow}$ Posons $\mathcal{C} = \{B \subset Y \ / \ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X\}$
Montrons que $\mathcal{C}$ est une tribu car alors on conclut.
En effet, par hypothèse, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, si $\mathcal{C}$ est une tribu, $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$.

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}_X \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{C}$

- Soit $B \in \mathcal{C}$. $f^{-1}(B^c) = \underbrace{\left(f^{-1}(B)\right)^c}_{\in \mathcal{B}_X} \in \mathcal{B}_X$ donc car il s'agit d'une tribu.

- Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, $f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(f^{-1}(B_n)\right)}_{\in \mathcal{B}_X} \in \mathcal{B}_X$ donc car il s'agit d'une tribu

Exo 4 : Mesure de Dirac

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $X \neq \emptyset$. soit $a \in X$

On pose $\delta_a : \begin{cases} \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+} \\ B \mapsto \delta_a(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

Montrons que δ_a définit une mesure (dite "mesure de Dirac en a") sur $\mathcal{B}$.

i) $\boxed{\delta_a(\emptyset) = 0}$ car $a \notin \emptyset$

ii) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables (2 à 2 disjointes)

Mq $\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(B_n)$

- $\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1 \iff a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\iff \exists ! n_0 \in \mathbb{N} / a \in B_{n_0}$ (unicité car $\forall (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2, B_{n_1} \cap B_{n_2} = \emptyset$)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_a(B_n) = \delta_a(B_{n_0}) + \underbrace{\sum_{\substack{n=0 \\ n\neq n_0}}^{+\infty} \delta_a(B_n)}_{=0}$

$= 1$

Réciproquement, $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_a(B_n) = 1$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / \delta_a(B_n) = 1$

(sinon, si $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_a(B_n) \neq 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \delta_a(B_n) = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_a(B_n) = 0$)

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / a \in B_n$

$\Rightarrow a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\Rightarrow \delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1$

- $\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 0 \iff a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, a \notin B_n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \delta_a(B_n) = 0$

$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_a(B_n) = 0$

$\Rightarrow$ Donc $\boxed{\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_a(B_n)}$

Remarque :

$$\int_X f \, d\delta_a = f(a)$$

cf $f = \alpha \chi_A$

- $\int_X f \, d\delta_a = \alpha \, \delta_a(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin A \\ \alpha \text{ si } a \in A \end{cases}$
- $f(a) = \alpha \chi_A(a) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin A \\ \alpha \text{ si } a \in A \end{cases}$

Exo 5 : Mesure de comptage.

On pose $\mu_d : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \\ B \longmapsto \mu_d(B) = |B| = \#B = \text{Card}(B) \end{cases}$

i) $\boxed{\mu_d(\emptyset) = \text{Card}(\emptyset) = 0}$

ii) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^{\mathbb{N}}$ une suite de parties 2 à 2 disjointes de $\mathbb{N}$.

$$\mu_d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Card}(B_n)$$

↳ union 2 à 2 disjointe

$$\Rightarrow \boxed{\mu_d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_d(B_n)}$$

Remarque :

$u : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}_+}$

$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\mu_d = \int_{\mathbb{N}} u(n) \, d\mu_d(n)$$

(suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$)

$\Rightarrow u(n) = u_n$

$$= \int_{\mathbb{N}} u_n \, d\mu_d(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \underbrace{\mu_d(\{n\})}_{=1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\overline{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} u(n) \, d\mu_d(n) \quad \text{si} \int_{\mathbb{N}} |u(n)| \, d\mu_d(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$$

Et Fubini nous donne :

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \int_{\mathbb{N}^2} u_{n,m} \, d\mu_d(n) \otimes d\mu_d(m) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$$