TP 2 - Équation de la chaleur

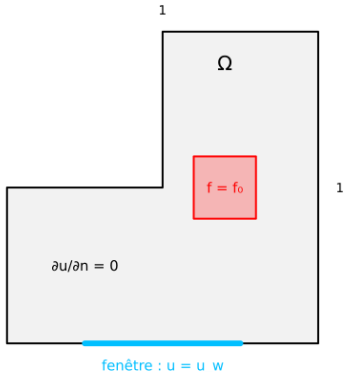
MAM4 - EDP1 · 2026-27

J.-B. Caillau

Plan

1. Le problème : une pièce en L, un radiateur, une fenêtre
2. Deux régimes : stationnaire (Poisson) et instationnaire (chaleur)
3. Volumes finis : le schéma à 5 points
4. La fonction `assemble` : matrice, conditions aux limites, indices
5. Évolution en temps : le θ-schéma
6. Stabilité : analyse exacte sur la matrice
7. Organisation du TP

Le problème



- $\Omega =]0,1[^2 \setminus [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$: pièce en L
- **Chauffage** : $f = f_0 = 250$ sur $[0.6, 0.8] \times [0.4, 0.6]$, 0 ailleurs
- **Parois isolantes** : Neumann, $\partial_n u = 0$
- **Fenêtre** (mur du bas, $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$) : Dirichlet, $u = u_w = -1$
- $\nu = 1$, $t_f = 4$, $u_0 \equiv u_w$

Dirichlet-Neumann sur le même bord : la solution n'est pas régulière aux extrémités de la fenêtre et au coin rentrant.

Régime instationnaire : l'équation de la chaleur

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u - \nu \Delta u = f, \quad t > 0,\ (x, y) \in \Omega, \\
&u(0, x, y) = u_0(x, y), \\
&\partial_n u = 0 \ \text{(parois)}, \qquad u = u_w \ \text{(fenêtre)}.
\end{aligned}
$$

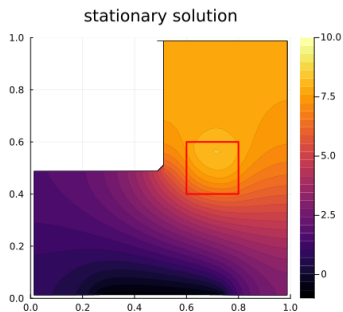
- Inconnue : $u(t, x, y)$
- Schéma en espace (volumes finis) + schéma en temps (θ-schéma)

Régime stationnaire : Poisson

$$-\nu \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

$\partial_n u = 0$ (parois), $\qquad u = u_w$ (fenêtre)

- Équilibre : $\partial_t u = 0$
- Problème elliptique $\Rightarrow$ un système linéaire $Au = b$
- Lien avec la chaleur : questions 2.3 et 2.6



Volumes finis : cellules

- $N \times N$ cellules carrées de côté $h = 1/N$; on garde celles de Ω (K cellules)
- u_k : température au centre de la cellule k
- On intègre sur la cellule C_k (Green) :

$$-\nu \int_{\partial C_k} \partial_n u \, d\gamma = \int_{C_k} f$$

- Face commune avec la voisine l : flux $\approx -\nu \dfrac{u_l - u_k}{h} h$
- Division par h^2, cellule intérieure : **schéma à 5 points**

$$\frac{\nu}{h^2}(4u_k - u_{kN} - u_{kS} - u_{kW} - u_{kE}) = f_k$$

`assemble` : ce qu'on construit

On cherche $A \in \mathbf{R}^{K \times K}$ et $b \in \mathbf{R}^{K}$ tels que le schéma s'écrive $Au = b$: **ligne k = équation de la cellule k.**

Deux points à comprendre :

1. le terme général de A, et comment les **conditions aux limites** entrent dans A et b ;
2. le passage **indice physique** $(j, i) \leftrightarrow$ **indice logique** k : le rôle de `idx`.

(i) Terme général de la matrice

Ligne k : on parcourt les 4 voisines (N, S, W, E). Pour chaque voisine l **dans** Ω :

- $A_{kl} = -\nu/h^2$
- $A_{kk} \mathrel{+}= \nu/h^2$

Cellule intérieure : $A_{kk} = 4\nu/h^2$ et quatre coefficients $-\nu/h^2 \Rightarrow$ schéma à 5 points.

Second membre : $b_k = f_k$.

(i) Neumann : terme absent

Paroi isolante $\Rightarrow$ flux nul $\Rightarrow$ **le terme n'existe pas**.

- pas de coefficient hors diagonale pour la voisine manquante
- pas de contribution à la diagonale
- b inchangé

Exemple : une cellule contre un mur a $A_{kk} = 3\nu/h^2$.

Neumann modifie la matrice (par l'absence de termes).

(i) Dirichlet : fenêtre

Face à la température u_w, à la distance $h/2$ du centre :

$$\text{flux} = -\nu \, \frac{u_w - u_k}{h/2} \, h \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\nu}{h^2}(u_k - u_w)$$

- $A_{kk} \mathrel{+}= 2\nu/h^2$
- $b_k \mathrel{+}= \dfrac{2\nu}{h^2} \, u_w$ (donnée connue au second membre)

Dirichlet modifie la matrice et le second membre.

A est symétrique, définie positive grâce à la fenêtre (sans elle : $A\mathbf{1} = 0$).

(ii) Indices physique et logique

Physique (j, i)

- j : ligne, coordonnée en y
- i : colonne, coordonnée en x
- centre : $((i - \frac{1}{2})h, (j - \frac{1}{2})h)$
- tableaux $N \times N$: `mask`, `win`, `f`

Logique $k \in \{1, \dots, K\}$

- numéro de l'inconnue
- position dans u, b, lignes et colonnes de A
- seulement les cellules de Ω

`idx[j,i]` $= k$ (et `0` hors de Ω), rempli par `idx[mask] = 1:K` : numérotation **colonne par colonne**.

Exemple miniature : idx ($N = 4$, $K = 12$)

$j\backslash i$	1	2	3	4
4	·	·	8	12
3	·	·	7	11
2	2	4	6	10
1	1	**3**	**5**	9

(fenêtre sous les colonnes 2 et 3)

- $k = 4$, en $(2, 2)$: voisines W $= 2$, E $= 6$, S $= 3$; N hors de Ω (mur) $A_{44} = 3\nu/h^2$, $A_{42} = A_{43} = A_{46} = -\nu/h^2$
- $k = 3$, en $(1, 2)$: voisines W $= 1$, E $= 5$, N $= 4$; au sud, la fenêtre $A_{33} = 3\nu/h^2 + 2\nu/h^2$, $b_3 = f_3 + \frac{2\nu}{h^2} u_w$

assemble : le code

```
function assemble(mask, win, f, h; ν = 1.0, uw = 0.0)
    K = count(mask)
    idx = zeros(Int, size(mask))
    idx[mask] = 1:K
    rows, cols, vals = Int[], Int[], Float64[]
    b = f[mask]                                  # new array
    for c ∈ findall(mask)                        # c = CartesianIndex(j, i)
        k = idx[c]
        d = 0.0
        for δ ∈ (CartesianIndex(0, -1), CartesianIndex(0, 1), CartesianIndex(-1, 0), CartesianIndex(1, 0))
            n = c + δ
            if checkbounds(Bool, mask, n) && mask[n]    # neighbour in Ω
                push!(rows, k); push!(cols, idx[n]); push!(vals, -ν / h^2)
                d += ν / h^2
            end                                          # else: insulating wall, no flux
        end
        if win[c]                                        # Dirichlet face at distance h/2
            d += 2ν / h^2
            b[k] += 2ν / h^2 * uw
        end
        push!(rows, k); push!(cols, k); push!(vals, d)
    end
    return sparse(rows, cols, vals, K, K), b, idx
end
```

`assemble` : lecture du code

- `idx[mask] = 1:K` : numérotation logique ; `b = f[mask]` : $(f_k)_k$ dans le même ordre
- `for c ∈ findall(mask)` : une ligne de A par cellule, `k = idx[c]`
- boucle sur `δ` (W, E, S, N) : voisine dans $\Omega \Rightarrow -\nu/h^2$ et diagonale $+\nu/h^2$; sinon rien (**Neumann**)
- `if win[c]` : **Dirichlet**, $+2\nu/h^2$ en diagonale et dans b_k (fois u_w)
- `sparse(rows, cols, vals, K, K)` : triplets $\rightarrow$ matrice creuse (5 coefficients par ligne au plus)
- `ustat = cholesky(Symmetric(A)) \ b` : A symétrique définie positive

Retour au dessin : `field(u, mask)` donne un tableau $N \times N$ (`NaN` hors de Ω) ; `contourf(x, y, U)` attend `U[j,i]`.

Évolution en temps

Même discrétisation en espace :

$$\frac{du}{dt} + Au = b, \qquad u(0) = (u_w, \dots, u_w)$$

Mêmes A et b que pour Poisson :

- Neumann dans la structure de A, Dirichlet dans la diagonale de A et dans b
- le terme en temps n'ajoute que l'identité
- (f et u_w indépendants du temps)

Le θ-schéma

$$(I + \theta \Delta t\, A)\, u^{n+1} = (I - (1-\theta)\Delta t\, A) u^n + \Delta t\, b$$

- $\theta = 0$: explicite ; $\theta = 1$: Euler implicite ; $\theta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicolson
- $I + \theta \Delta t\, A$ symétrique définie positive, **constante** : une seule factorisation (`cholesky`), une résolution par pas
- pas de temps piloté par $\sigma = \nu \Delta t / h^2$; t_f fixé

À programmer : `evolve` (les `# TBC`).

Stabilité (1) : l'erreur est gouvernée par G

Deux solutions du schéma, $e^n := \tilde{u}^n - u^n$. Par linéarité, b disparaît :

$$e^{n+1} = G\, e^n, \qquad G = (I + \theta \Delta t\, A)^{-1}(I - (1-\theta)\Delta t\, A)$$

- G **contient les conditions aux limites** (via A) et la géométrie de la pièce
- stabilité = comportement de G^n

Stabilité (2) : sur chaque direction propre

A symétrique définie positive : base orthonormée (v_j), $Av_j = \lambda_j v_j$, $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_K$.

$$Gv_j = a(\lambda_j)\, v_j, \qquad a(\lambda) = \frac{1 - (1-\theta)\Delta t\, \lambda}{1 + \theta \Delta t\, \lambda}$$

$$e^0 = \sum_j c_j v_j \quad \Longrightarrow \quad e^n = \sum_j c_j\, a(\lambda_j)^n\, v_j$$

$$\|e^n\|^2 = \sum_j c_j^2\, a(\lambda_j)^{2n}$$

Stable en $\ell^2 \iff |a(\lambda_j)| \leq 1$ pour tout j (condition **nécessaire et suffisante**, sans constante : $\|G\|_2 = \max_j |a(\lambda_j)|$).

Stabilité (3) : les trois schémas

schéma	$a(\lambda)$	$\lvert a\rvert \leq 1$ pour tout j ?	$\Delta t\lambda \to \infty$
explicite	$1 - \Delta t\, \lambda$	ssi $\Delta t\, \lambda_K \leq 2$	instable
Euler implicite	$\dfrac{1}{1 + \Delta t\, \lambda}$	toujours	$\to 0$
Crank-Nicolson	$\dfrac{1-z}{1+z}$, $z = \frac{\Delta t \lambda}{2}$	toujours	$\to -1$

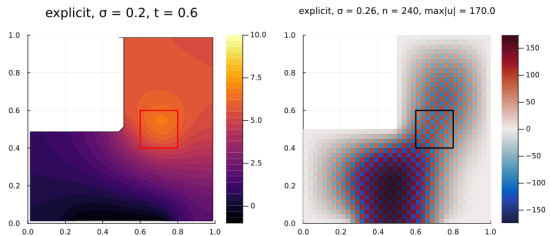
- explicite : le mode de plus grande valeur propre est le plus exigeant
- Crank-Nicolson : stable mais les modes raides changent de signe à chaque pas (question 2.6)

Stabilité (4) : où est λ_K ?

Spectre de A non explicite (pièce en L, conditions mixtes) : **Gershgorin**

$$\lambda_K \leq \frac{8\nu}{h^2} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \frac{\nu \Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{4} \text{ suffit}$$

- presque atteint : $N = 40$, $\lambda_K = 12775$ pour $8\nu/h^2 = 12800$
- mode instable : le damier (d'une cellule à l'autre)



explicite : $\sigma = 0.2$ (gauche), $\sigma = 0.26$ (droite)

Analyse exacte vs von Neumann

- **Même facteur** $a(\lambda)$, spectres différents
- **von Neumann** : a priori, maillage uniforme, domaine périodique ou infini ; modes de Fourier, $\lambda(k) = \frac{4\nu}{h^2}(\sin^2 \frac{k_x h}{2} + \sin^2 \frac{k_y h}{2}) \in [0, 8\nu/h^2] \Rightarrow$ même condition $\sigma \leq \frac{1}{4}$, mais ignore bords et géométrie
- **Matrice** A : exacte pour le problème posé, bords compris ; plus grandes valeurs propres locales (même résultat), plus petites sensibles aux bords ($\lambda_1 > 0$ grâce à la fenêtre : vitesse en $e^{-\lambda_1 t}$)
- **Limite** : $\|G\|_2 = \max |a|$ vient de la symétrie de A ; pour l'advection (TP 1, non symétrique) le spectre ne suffit plus

Organisation du TP

- Code de départ du sujet : à exécuter une fois, puis compléter les `# TBC`
- **Exercice 1** (Poisson) : assemblage, résolution, bilan d'énergie, déplacement du chauffage, validation, convergence en espace
- **Exercice 2** (chaleur) : Crank-Nicolson et conditions aux limites, stabilité, `evolve`, schéma explicite, ordre en temps, grand pas de temps
- Pièges : $(j, i) =$ (ligne en y, colonne en x) ; indice physique $\neq$ logique ; coefficient de Dirichlet $2\nu/h^2$