Tod 4 - Stabilité (2/2) (Pas ds l'exam)

Exo 1 :

1.1) dq le schéma explicite :

$$(*) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (\nu \geq 0)$$

$\begin{cases} j = 0, \dots, J \\ n \geq 0 \end{cases}$

s'écrit comme une combinaison convexe des $(u_j^n)_j$, ss cond CFL que l'on précisera.

$$(*) \Leftrightarrow \left(u_j^{n+1} = u_j^n + \sigma \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right) \right)$$

$$\sigma := \frac{\Delta t . \nu}{\Delta x^2}$$

$$= (1 - 2\sigma) u_j^n + \sigma u_{j+1}^n + \sigma u_{j-1}^n$$

La somme des coeffs est 1 (cf $(1 - 2\sigma) + \sigma + \sigma = 1$) le sont que l'on a une combinaison convexe ssi ces coeffs sont aussi ≥ 0, or $\sigma \geq 0$, donc on a convexité ssi : $1 - 2\sigma \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sigma \leq \frac{1}{2} \right)$: CFL

(idem stabL² ---)

A

1.2) En déduire que si : $m \leq u_j^0 \leq M$, $j=0,\dots,J$,

On a : $m \leq u_j^n \leq M$, $j=0,\dots,J$, $n \in \mathbb{N}$

Par récurr sur n :

$m \leq 0 = u_{0/J}^0 \leq M$

$\uparrow$ cf : $j=0$ ou J

- $n=0$: OK
- Supp. que : $m \leq u_j^0 \leq M$, $j=0,\dots,J$

$\Rightarrow m \leq u_j^p \leq M$, $j=0,\dots,J$

$p=0,\dots,n$

Or, soit $j \in \{1,\dots,J-1\}$, on a :

u_j^{n+1} comb. convexe de u_{j-1}^n, u_j^n et u_{j+1}^n !

Comme $[m,M]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, donc un convexe (stable par combinaison convexe), $u_j^{n+1} \in [m,M]$.

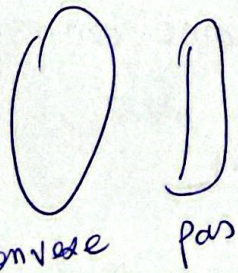
Rappel $C \subset E$, E ev

C convexe $\Leftrightarrow (\forall (x,y) \in C^2) : [x,y] \subset C$

$\{(1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0,1]\}$

$= \{\lambda x + \mu y, \lambda, \mu \geq 0$

$\lambda + \mu = 1\}$



Convexe pas convexe

(cf. Optimisat° / MaMu)

$\Leftrightarrow$ C stable par condit° convexe, ie $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$

$(\forall x_0, \dots, x_n \in C)(\forall \lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1) \in C$

1.3) On a mq la condit° $\sigma \leq 1/2$ est suffisante pour avoir la stabilité L^∞ ; mq elle est aussi nécessaire à l'aide du contre-exemple suivt : supposons $\sigma > 1/2$

et considérons $u_j^0 = (-1)^j$, $j = \underbrace{1, \dots, J-1}_{\in \mathbb{Z}}$

On a, pr $j = 1, \dots, J-1$,

$$u_j^1 = \sigma u_{j-1}^0 + (1-2\sigma) u_j^0 + \sigma u_{j+1}^0$$

$$= (-1)^j \underbrace{\left(-\sigma + (1-2\sigma) - \sigma\right)}_{1-4\sigma \,<\, 1-2 = -1}$$

$$= (-1)^j (1-4\sigma), \quad j \in \mathbb{Z}$$

de même, $u_j^2 = (-1)^j (1-4\sigma)^2$

$$\vdots$$

$$|u_j^n| = |1-4\sigma|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty, \text{ cf } \sigma > 1/2.$$

$\Rightarrow |1-4\sigma| > 1$

$\Rightarrow$ instable au sens L^∞.

Scanned with CamScanner

Exo 2 : Euler implicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}}{\Delta x^2} = 0,$$

$j = 1, \dots, J-1$,

$u_0^n = u_J^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

2.1) Pq le schéma se met (Dirichlet) ss la forme :

$$A \cdot U^{n+1} = U^n \quad \text{où} \quad U^n := (u_j^n)_{j=0,\dots,J} = \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_J^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{J+1}$$

Si $A \in GL(J+1, \mathbb{R})$ (ie A inversible)

On a : $-\sigma u_{j-1}^{n+1} +$

$$(*) : u_j^{n+1} - \sigma \left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} \right) = u_j^n,$$

(et $\begin{cases} u_0^{n+1} = 0 = u_0^n \\ u_J^{n+1} = 0 = u_J^n \end{cases}$), ie $AU^{n+1} = U^n$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (J-1) \times (J-1)$$

→ Cette matrice est à diagonale dominante, i.e

$$\left| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{J} a_{ij} \right| < |a_{ii}| \text{, ok. évident si } i=0 \text{ ou } J \ (1>0)$$

et si $i \in \{1, \dots, J-1\}$, $|-\sigma - \sigma| = 2\sigma < 1+2\sigma$.

2.a) dq on a stabilité au sens L^∞, ie que :

$$m \leq u_j^0 \leq M \quad , j=0,\dots,J \Rightarrow$$

$$m \leq u_j^n \leq M, \ j=0,\dots,J \quad n \in \mathbb{N}$$

Par récurrence

- $n=0$: OK (Rq : la condit° en $n=0 \Rightarrow 0 \in [m, M]$)
- Supp. que : $m \leq u_j^0 \leq M$, $j=0,\dots,J$

$$\Rightarrow m \leq u_j^p \leq M, \ j=0,\dots,J, \ p=0,\dots,n$$

Or, $\exists k \in \{0,\dots,J\}$ tq :

$$u_k^{n+1} = \max_{j=0,\dots,J} u_j^{n+1}$$

Si $k \in \{1,\dots,J-1\}$,

$$-\sigma u_{k-1}^{n+1} + (1+2\sigma) u_k^{n+1} - \sigma u_{k+1}^{n+1} = u_k^n$$

$$\Rightarrow (1+2\sigma) u_k^{n+1} - \sigma u_{k+1}^{n+1} = u_k^n + \sigma u_{k-1}^{n+1}$$

$$\leq M + 2\sigma M^{n+1}$$

Sinn, $k=0$ ou J, auquel cas $u_k^{n+1} = 0 \in [m, M]$

$\Rightarrow u_k^{n+1} \leq M$

$\Rightarrow u_j^{n+1} \leq M$

De m̂

$\exists k \in \{0, \dots, J\}$ tq :

$$u R^{n+1} = \min_{j=0,\dots J} u_j^{n+1}$$

si $k \in \{1, \dots, J-1\}$

$$(1+2\sigma) u_k^{n+1} = u_k^n + \sigma u_{k-1}^{n+1} + \sigma u_{k+1}^{n+1}$$

$$\geq m + 2\sigma u_k^{n+1}$$

sinn $k = 0$ ou J et $u_k^{n+1} = 0 \in [m, M]$

$\Rightarrow u_j^{n+1} \geq m$

Exo3 : On considère le schéma décentré amt pr l'equat° d' $\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, V > 0 \right)$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}$$

3.1)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \sigma\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$\left\{ \sigma := \frac{V\Delta t}{\Delta x} \right.$$

$$= (1-\sigma)\, u_j^n + \sigma\, u_{j-1}^n \,, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$(1-\sigma) + \sigma = 1$ et $\sigma = \frac{V\Delta t}{\Delta x} \geq 0$ car $V > 0$

dc : Combinaison convexe ssi $1-\sigma \geq 0$, i.e. $\sigma \leq 1$

3.2) Sous cette condit°, mq

$$m \leq u_j^0 \leq M \,, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \leq u_j^n \leq M \,; \quad j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence :

- $n = 0$: OK
- Supp. la relat° vraie jusqu'au rang n, alors :

$$u_j^{n+1} = (1-\sigma)\, u_j^n + \sigma\, u_{j-1}^n \in [m, M] \text{ (Convexe)}$$

≥ 0 (CFL) $\qquad \in [m, M]$ (H.R)

3.3) La condit° $\sigma = \frac{V \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1$ est dc suffisante pour la stabilité L^∞ ; mq elle est aussi nécessaire.

Supp. $\sigma > 1$, et posons $u_j^0 = (-1)^j$ $j \in \mathbb{Z}$

Scanned with CamScanner

Alas:

$$u_j^1 = (1-\sigma)\, u_j^0 + \sigma\, u_{j-1}^0$$

$$= (-1)^j (1-\sigma) + \sigma\, u_{j-1}^0$$

$$\Rightarrow u_j^1 = (-1)^j (1-\sigma) + \sigma (-1)^{j-1}$$

~~$(-1)^j - \sigma(-1)^j + \sigma(-1)^{j-1}$~~

$$= (-1)^j \left(1 - \sigma + \sigma\right) = (-1)^j (1-2\sigma)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_j = (-1)^j \left(\frac{\sigma - \sigma^2 + 1}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow u_j^n = (1-2\sigma)^n (-1)^j$$

$$\Rightarrow |u_j^n| = |1-2\sigma|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

car $\sigma > 1 \Rightarrow 1 - 2\sigma < -1$

$\Rightarrow |1-2\sigma| > 1$

Scanned with CamScanner