# Ed 3. Stabilité (1/2)

**Exo 1** : Etudier la stabilité au sens $L^2$ du Q schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \partial(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \partial\theta\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

(explicite : $u^n$ ; implicite : $u^{n+1}$)

$\theta \in [0,1]$ $\Rightarrow$ Combinaison convexe des schémas explicite et implicite

Schéma semi-discret : $u^n(x) \xrightarrow{TF} \hat{u}^n(\xi)$

$$(X) \quad \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} - \partial(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \partial\theta\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0$$

$$(V) : \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} - \partial(1-\theta)\frac{u^n(x+\Delta x) - 2u^n(x) + u^n(x-\Delta x)}{\Delta x^2} - \partial\theta\frac{u^{n+1}(x+\Delta x) - 2u^{n+1}(x) + u^{n+1}(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = 0$$

TF

$$\Rightarrow \hat{u}^{n+1}(\xi) - \hat{u}^n(\xi) \qquad (*)$$

$$\sigma = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - (1-\theta)\sigma \left( \hat{u}^n(\xi) \cdot e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2\hat{u}^n(\xi) + \hat{u}^n(\xi) \cdot e^{-2i\pi\xi\Delta x} \right)$$

$$- \theta\sigma \left( \hat{u}^{n+1}(\xi) \cdot e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2\hat{u}^{n+1}(\xi) + \hat{u}^{n+1}(\xi) \cdot e^{-2i\pi\xi\Delta x} \right) = 0$$

$(**)$

$$\Rightarrow \hat{u}^{n+1}(\xi)\left(1 + 4\theta\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x)\right) = \hat{u}^n(\xi)\left(1 - 4(1-\theta)\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x)\right)$$

$\geq 0, \forall \xi$

Avec :

$$(*) : \equiv \hat{u}^n(\xi)\left(e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\xi\Delta x}\right)$$

$\cos\varphi - 1 \qquad 2(\cos(2\pi\xi\Delta x) - 1)$

$= (-2\sin^2\frac{\varphi}{2}) - 1 = 2(1 - 2\sin^2(\pi\xi\Delta x) - 1)$

$= -2\sin^2\varphi/2 = -4\sin^2(\pi\xi\Delta x)$

$$(**) = \hat{u}^{n+1}(\xi)\left(-4\sin^2(\pi\xi\Delta x)\right)$$

D'où finalement

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = a(\xi)\,\hat{u}^n(\xi) \text{ avec :} \quad \leftarrow \text{facteur}$$

$$\boxed{a(\xi) = \frac{1 - 4(1-\theta)\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)}{1 + 4\theta\sigma\sin^2(\pi\xi\Delta x)}}$$

Scanned with CamScanner

CNS stabilité (de von Neumann) : $(\exists K)\ (\forall \xi)(\forall \Delta t)$ :

$$|a(\xi)| \leq 1 + K.\Delta t$$

Ici, pas de $\Delta t$, donc c'est éq. à :

$$(\forall\, \xi) : |a(\xi)| \leq 1$$

---

Or, ici : $a(\xi) \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$, donc : $|a(\xi)| \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq a(\xi) \leq 1$$

i) $a(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - (1-\theta)\alpha \leq 1 + \theta\alpha$, $\alpha := \underbrace{4\sigma \sin^2(\tfrac{1}{2}\xi\Delta x)}_{\geq 0}$

$\Leftrightarrow -\alpha \leq 0$ : tjrs vraie !

ii) $a(\xi) \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad 1 - (1-\theta)\alpha \geq -(1+\theta\alpha)$

$\Leftrightarrow \quad \alpha(\theta + \theta - 1) \geq -1 - 1$

$\Leftrightarrow \quad \alpha(2\theta - 1) \geq -2$

$\Leftrightarrow \quad (1 - 2\theta)\alpha \leq 2$

↑

condit° sur $\alpha = \alpha(\xi) \geq 0$

pr que ce soit vrai $\forall \xi$

- si $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ : $1 - 2\theta \leq 0$

↓

Crank-Nicolson $\Rightarrow \underbrace{\alpha}_{\geq 0}(1-2\theta) \leq 0 \leq 2$ ;

dans ce cas, le schéma (implicite) est stable sans condition sur $\alpha$ (ie sur $\sigma$, cf. $\alpha(\xi) = 4\sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x)$).
On dit qu'il est inconditionnellement stable : $\forall \sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, le schéma est stable

($\Rightarrow$ mais si $\Delta x$ est petit, on peut faire $\Delta t$ grand : dégradation de la précision mais pas d'instabilité)

- si $\theta \in [0, \frac{1}{2}[$ : $1 - 2\theta > 0$,

$(1-2\theta)\alpha \leq 2 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{2}{1-2\theta}$

$\Leftrightarrow (\forall \xi \in \mathbb{R}) : 4\sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x) \leq \frac{2}{1-2\theta}$

$\Leftarrow \sup_{\xi \in \mathbb{R}} 4\sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x) \leq \frac{2}{1-2\theta}$

$4\sigma$

$\Leftrightarrow \sigma \leq \underbrace{\frac{1}{2(1-2\theta)}}_{>0}$ $\left(\text{ie } \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}\right)$

Rq : i) $\theta = 0$ (explicite) :

$\sigma \leq 1/2$ (sinn instable !)

ii) $\dfrac{1}{2(1-2\theta)} \xrightarrow[\theta < \frac{1}{2}]{\theta \to \frac{1}{2}} \infty$ : cohérent avec la stabilité inconditionnelle en $\theta = \frac{1}{2}$ (C.V)

**Exo 2 :**

Equat° d'adect°

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\to 0} + \underbrace{V \frac{\partial u}{\partial x}}_{\to \text{adect°}} = 0$$

↑ diffus°

$$\Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{V}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{V}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

( Crank - Nicolson pr l'adect° avec DF centrées pr $\frac{\partial u}{\partial x}$ )

+ Pr etudier la stabilité au sens $L^2$, on considère le schéma semi-discret :

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} + \frac{V}{2} \frac{u^n(x+\Delta x) - u^n(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$+ \frac{V}{2} \frac{u^{n+1}(x+\Delta x) - u^{n+1}(x-\Delta x)}{2\Delta x} = 0 \quad (*)$$



Scanned with CamScanner

$$0 \overset{TF}{\Rightarrow} \hat{u}^{n+1}(\xi) - \hat{u}^n(\xi) + \frac{\sigma}{4}\left(e^{2i\pi\xi\Delta x}\hat{u}^n(\xi) - e^{-2i\pi\xi\Delta x}\hat{u}^n(\xi)\right) - \sigma_{:=\frac{v\Delta t}{\Delta x}}\Big)$$

$$+ \frac{\sigma}{4}\Big(\underbrace{e^{\cdots}\cdot\hat{u}^{n+1}(\xi) - e^{-\cdots}\hat{u}^{n+1}(\xi)}_{2i\sin(2\pi\xi\Delta x)} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}^{n+1}(\xi) = \frac{1 - \frac{i\sigma}{2}\sin(\cdots)}{1 + \frac{i\sigma}{2}\sin(2\pi\xi\Delta x)}\,\hat{u}^n(\xi) \quad \cdot\hat{u}^{n+1}(\xi)$$

$$:= a(\xi)$$

- $|a(\xi)| = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ stabilité (inconditionnelle) au sens $L^2$ par Th. de von Neumann.

- Rq : de façon équivalente à faire la TF sur le schéma semi-discret, on peut également déterminer le facteur d'amplificat° $a(\xi)$

$+$ on injecte un mode de Fourier"

$u^n_j(\xi) = a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}$ (ie on cherche une sol. du schéma (*) ss cette forme),

$$\frac{a^{n+1}(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}}{\Delta t} \neq 0 \text{ si } a(\xi) \neq 0$$

$$+ \frac{V}{4\Delta x}\left( a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi (j+1)\Delta x} - a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi (j-1)\Delta x}\right)$$

$$+ \frac{V}{4\Delta x}\left( a^{n+1}(\xi)\, e^{2i\pi\xi (j+1)\Delta x} - a^{n+1}(\xi)\, e^{2i\pi\xi (j-1)\Delta x}\right) = 0$$

En simplif par $a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}$

$$\Rightarrow \frac{a(\xi) - 1}{\Delta t} + \frac{V}{4\Delta x}\left(e^{2i\pi\xi\Delta x} - e^{-2i\pi\xi\Delta x}\right)$$

$$+ \frac{V}{4\Delta x}\left(a\cdot e^{+\frac{\cdots}{\cdots}} - a\cdot e^{-\frac{\cdots}{\cdots}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a(\xi)\left(1 + \frac{iG}{2}\sin(2\pi\xi\Delta x)\right) = 1 - \frac{iG}{2}\sin\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)$$

$$\hookrightarrow a(\xi) = \boxed{\frac{1 - \frac{iG}{2}\sin\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)}{1 + \frac{iG}{2}\sin(2\pi\xi\Delta x)}}$$

**Exo 3**

3.1. Schéma Leapfrog = "saute-mouton"

$$\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - V\cdot\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0\right)$$

explicite

↳ Df centré pour erreur consistance d'ordre 2 en t.

NB : Récurrence ordre 2 (cf $n+1$ dépend de $n$ et $n-1$)



Scanned with CamScanner

Injetons un mode de Fourier

$$u_j^n(\xi) = a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}$$

$$\frac{a^{n+1}(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x} - a^{n-1}(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}}{2\Delta t}$$

$$- \nu \frac{a^n(\xi) e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2a^n(\xi) e^{2i\pi\xi j\Delta x} + a^n(\xi) e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow = -\nu \frac{a^n(\xi)\left[e^{2i\pi\xi(j+1)\Delta x} - 2e^{2i\pi\xi j\Delta x} + e^{2i\pi\xi(j-1)\Delta x}\right]}{\Delta x^2}$$

$$= -\nu \frac{a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}\left(e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi\xi\Delta x}\right)}{\Delta x^2}$$

$$= -\nu \frac{a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}\left(2\cos(2\pi\xi\Delta x) - 2\right)}{\Delta x^2}$$

$$\rightarrow \frac{a^2(\xi) - 1}{2\Delta t} - \nu \frac{\cdots}{\Delta x^2}$$

$$\sigma := \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$a(\xi) e^{2i\pi\xi\Delta x} - 2a(\xi) + a(\xi)\cdot e^{-2i\pi\xi\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(\xi) - 1}{2\Delta t} - \sigma a(\xi)\left(2\cos(2\pi\xi\Delta x) - 2\right) = 0$$

$$1 - 2\sin^2(\pi\xi\Delta x)$$

$$\Rightarrow a^2(\xi) - 1 + 8\sigma a(\xi)\sin^2(\pi\xi\Delta x) = 0$$

Scanned with CamScanner

ie : $1 \cdot a^2(\xi) + 8\sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x)\, a(\xi) - 1 = 0$

Rq : En fait si on part de la TF sur l'équat° semi-discrète, on obtiendrait :

$$1 \cdot \hat{u}^{n+1}(\xi) + 8\sigma \sin^2(\dots)\, \hat{u}^n(\xi) - 1\, \hat{u}^{n-1}(\xi) = 0.$$

(Récurrence de long. 2 linéaire sur $\hat{u}^n(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$)

+ Alors, chercher une solution ss la forme $\hat{u}^n(\xi) = a^n(\xi)$ donne l'equat° caractéristique associée, qui est bien (*) : $1 \cdot a^2(\xi) + 8\sigma \sin^2(\pi \xi \Delta x)\, a(\xi) - 1 = 0$.

Or, on sait que la sol. générale d'une récurrence linéaire double est :

i) soit $\Delta \neq 0$, et on a 2 racines (complexes si $\Delta < 0$) distincts $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$ et

$$\hat{u}^n(\xi) = \lambda(\xi) \cdot a_1^n(\xi) + \mu(\xi) \cdot a_2^n(\xi)$$

(où $\lambda$ et $\mu$ s$^t$ données par $u^0(\xi)$ et $u^1(\xi)$ --)

ii) Soit $\Delta = 0$ et on a une racine double, $a(\xi)$,

$$\hat{u}^n(\xi) = \lambda(\xi) \cdot a^n(\xi) + n\, \mu(\xi) \cdot a^n(\xi)$$

D'où la condit° de stabilité $L^2$ :

i) $|a_1(\xi)|$ et $|a_2(\xi)| \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}$

ii) $|a(\xi)| < 1$, $\forall \xi$



Scanned with CamScanner

En synthèse

- soit $\Delta(\xi) \neq 0$ et la condit° est $|a_1(\xi)|$ et $|a_2(\xi)| \leq 1$
- soit $\Delta(\xi) = 0$ — " — $|a_1(\xi)| = |a_2(\xi)| < 1$

↑ (cf. $a_1(\xi) = a_2(\xi)$)

Sur le cas du schéma Leapfrog :

$$\Delta = \Delta(\xi) = 64\sigma^2 \sin^4(\pi \xi \Delta x) + 4 \geq 4 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(\xi) = \dfrac{-8\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x) + \sqrt{\Delta}}{2} \\ a_2(\xi) = \dfrac{-8\sigma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

Or $a_1(\xi)\, a_2(\xi) = \dfrac{-1}{1} = -1$ et $a_1(\xi) + a_2(\xi) = -b/a$

$$= -\frac{8\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x)}{2}$$

$$= -4\sigma \sin^2(\pi\xi\Delta x)$$

$\Rightarrow$ sauf quand $\sin(\pi\xi\Delta x) = 0$

On a : $a_1(\xi) + a_2(\xi) \neq 0$ ($\Rightarrow (a_1(\xi), a_2(\xi)) \neq (1, -1)$)

$\Rightarrow |a_1(\xi)| \cdot |a_2(\xi)| = 1$

$\Rightarrow$ au $\ominus$ une des racines est de module $> 1$

Tjrs instable au sens $L^2$.

Rq : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ !

$\Delta \geq 0$ :

$$\begin{cases} x_+ + x_- = -b/a \\ x_+ \, x_- = c/a \end{cases}$$

→ Bien que le schéma Leapfrog soit d'ordre 2 en temps (cf. TD2) il est inconditionnellement instable.

→ " inutilisable en pratique "

3.2 On remède à cette instabilité en implicitant le schéma :

Leapfrog ⟶ Dufort - Frankel :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - \left(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}\right) + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

(implicite ; $\simeq 2u_j^n$ → récurrence de long 2)

En injectant un mode de fourier $u_j^n(\xi) = a^n(\xi)\, e^{2i\pi\xi j\Delta x}$

(et en simplifiant $a^{n-1}(\xi) e^{2i\pi\xi j\Delta x} \neq 0$), on a :

$$\Rightarrow \frac{a^2(\xi) - 1}{2\Delta t} - \nu \frac{a(\xi) e^{2i\pi\xi\Delta x} - \left(a^2(\xi) + 1\right) + a(\xi) e^{-2i\pi\xi\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow a^2(\xi) - 1 - 2\sigma \left(2\cos(2\pi\xi\Delta x)\, a(\xi) - \left(a^2(\xi) + 1\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + 2\sigma)\, a^2(\xi) - 4\sigma \cos(2\pi\xi\Delta x)\, a(\xi) - (1 - 2\sigma) = 0$$

$$\Delta(\xi) = 16\sigma^2\cos^2(2\pi\xi\Delta x) + 4(1-4\sigma^2)$$

$$= 16\sigma^2\underbrace{\left(\cos^2(2\pi\xi\Delta x) - 1\right)}_{-\sin^2(2\pi\xi(\Delta x))} + 4$$

$$= 4\left(1 - 4\sigma^2\sin^2(2\pi\xi\Delta x)\right)$$

i) $\underline{\Delta(\xi) > 0}$ : $a_\pm(\xi) = \dfrac{4\sigma\cos(-) \pm 2\sqrt{1-4\sigma^2\sin^2(-)}}{2(1+2\sigma)}$

$$\Rightarrow |a_\pm(\xi)| \leq \frac{2\sigma + 1}{1+2\sigma} = 1$$

ii) $\underline{\Delta(\xi) < 0}$ : $a_\pm(\xi) = \dfrac{2\sigma\cos(-) \pm i\sqrt{4\sigma^2\sin^2(-)-1}}{1+2\sigma}$

$a_+(\xi)\cdot a_-(\xi) = |a_+(\xi)|^2 = |a_-(\xi)|^2$ puisque les 2 racines sont conjuguées

$= \dfrac{2\sigma - 1}{1+2\sigma} < 1$ ( NB

$\Delta < 0 \Rightarrow 4\sigma^2\sin^2(-) - 1 > 0$

$\Rightarrow 4\sigma^2 > 4\sigma^2\sin^2(\,) > 1$

$\Rightarrow 2\sigma > 1$

$\Rightarrow 1 - 2\sigma \geq 0$

① Consistance dégradée, condi. (cf. $\frac{\Delta\sigma}{\pi\pi}$ -- 0,7 D2)

stabilité inconditionnelle

iii) $\Delta(\xi) = 0$

$a_+(\xi) = a_-(\xi) = \dfrac{2\sigma\cos(-)}{1+2\sigma}$

$|a_+(\xi)| = |a_-(\xi)| \leq \dfrac{2\sigma}{1+2\sigma} < 1, \forall \xi$

→ ① c'est soit les racines sont distincts et $|\cdot| \leq 1$. + soit $= \Rightarrow$ et $|\cdot| < 1$