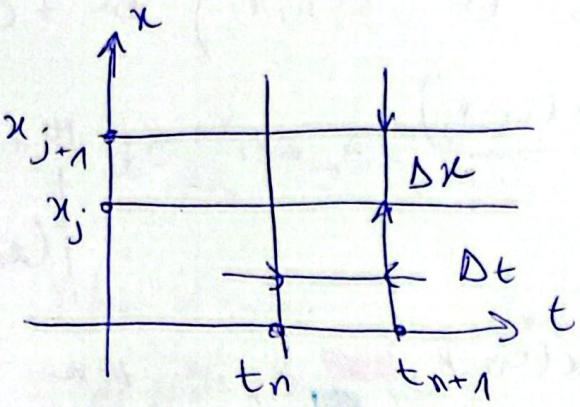
TD 2 - Etude de consistance -

Exo 1 :

θ - schéma pour la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx} u = 0, & t>0,\ x \in \Omega =]0,1[\\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega \quad (CI) \\ CL \end{cases}$$



$u_j^n \simeq u(t_n, x_j)$

$$\begin{cases} t_n = n.\Delta t, & n = 0, \dots, N \\ x_j = j\Delta x, & j = 0, \dots, J \quad \left(\Delta x = \frac{1-0}{J} \dots\right) \end{cases}$$

Explicite

θ - Schéma : $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu(1-\theta) \dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$

$\theta \in [0,1]$

$- \nu\theta \cdot \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0,$

implicite

$$\begin{cases} n = 0, \dots, N \\ j = 0, \dots, J \end{cases}$$

- $\epsilon_j^{n+1} = \dfrac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} - \partial(1-\theta)\cdot \dfrac{u(t_n, x_{j+1}) - \cdots}{\Delta x^2}$

$- \partial\theta \dfrac{u(t_{n+1}, x_{j+1}^2) - \cdots}{\Delta x^2}$

$\dfrac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})}{\Delta x^2}$

DL en (t_n, x_j) :

- A l'ordre 2 en t :

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + \partial_t u(t_n, x_j)\Delta t + \frac{1}{2}\partial_{tt} u(t_n, x_j)\cdot \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} = \partial_t u + \frac{1}{2}\partial_{tt} u\,\Delta t + O(\Delta t^2) \Big| (t_n, x_j)$$

- A l'ordre 4 en x :

$$u(t_n, x_{j\pm 1}) = u(t_n, x_j) \pm \partial_x u \cdot \Delta x + \frac{1}{2}\partial_{xx} u\,\Delta x^2 \pm \frac{1}{6}\partial_{xxx} u\,\Delta x^3 + \frac{1}{24}\partial_{xxxx} u\cdot \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \Big| (t_n, x_j)$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})}{\Delta x^2}$$

$$\textcircled{*}\ u(t_n, x_{j+1}) + u(t_n, x_{j-1})$$

$$= 2u(t_n, x_j) + \partial_{xx} u\,\Delta x^2 + \frac{1}{12}\partial_{xxxx} u\,\Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

$$(1) = \partial_{xx} u + \frac{1}{12}\partial_{xxxx} u\,\Delta x^2 + O(\Delta x^3) \Big| (t_n,$$

→ De même, avec un DL à l'ordre 4 en (t_{n+1}, x_j)

$$u(t_{n+1}, x_{j\pm1}) = u \pm \partial_x u \Delta x + \frac{1}{2}\partial_{xx} u \Delta x^2 \pm \frac{1}{6}\partial_{xxx} u \Delta x^3 + \frac{1}{24}\partial_{xxxx} u \Delta x^4 + o(\Delta x^4)\Big|_{(t_{n+1}, x_j)}$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j-1})}{\Delta x^2} = \partial_{xx} u + \frac{1}{12}\partial_{xxxx} u \Delta x^2 + o(\Delta x^3)\Big|_{(t_{n+1}, x_j)}$$

. Afin d'avoir un seul type d'expressions évaluées au même pt (t_n, x_j), on refait un DL (ordre 1) sur les termes en (t_{n+1}, x_j) :

$$\begin{cases} \partial_{xx} u(t_{n+1}, x_j) = \partial_{xx} u(t_n, x_j) + \partial_{xxt} u(t_n, x_j)\Delta t + o(\Delta t^2) \\ u(t_{n+1}, x_j) = \partial_{xxxx} u(t_n, x_j) + \partial_{xxxxt} u(t_n, x_j)\Delta t + o(\Delta t^2) \end{cases}$$

Donc :

$$\rightarrow E_j^n = \partial_t u_j^n + \frac{1}{2}\partial_{tt} u \Delta t + o(\Delta t^2) - \theta(1-\theta)\left(\partial_{xx} u + \frac{1}{12}\partial_{xxxx} u \Delta x^2 + o(\Delta x^3)\right) - \theta\left(\partial_{xx} u + \partial_{txx} u \Delta t + o(\Delta t) + \frac{1}{12}(\quad\right)$$

(2)

$\delta_{xxxx} \frac{1}{4}\Delta x^2 + \partial_{txxxx} u \cdot \Delta x^2 \Delta t + O(\Delta t)\Big) + O(\Delta x^2)$

$\hookrightarrow \partial_t u = \nu(1-\theta)\partial_{xx} u - \nu\theta\, r_{xxxx} = 0$

Car u sol

$$= \Big(\frac{1}{\nu} \partial_{tt} u - \nu\theta\, \partial_{txx} u \Big) \boxed{\Delta t}$$

$$- \frac{\nu}{12} \partial_{xxxx} u\, \Delta x^2 + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^3)$$

$$+ O(\Delta x^2 . \Delta t)$$

→ Le θ-schéma est dc, en général, d'ordre 1 en t et 2 en x.

Rq : i) La motiv. pr passer en implicite ($\theta > 0$) vient d'un gain en stabilité (cf TD3)

ii) ∃ un "bon choix" de θ qui donne aussi un gain en consistance :

$$\rightarrow \frac{1}{2} \partial_{tt} u - \nu\theta\, \partial_{txx} u = \partial_t \Big(\frac{1}{2} \partial_t u - \theta \underbrace{\nu \partial_{xx} u}_{\partial_t u} \Big)$$

$$= \partial_t \Big(\big(\tfrac{1}{2} - \theta\big) \partial_t u \Big)$$

$$= \Big(\frac{1}{2} - \theta\Big) \partial_{tt} u$$

$/(t_0, x_j)$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}$: le terme en Δt disparaît, et on gagne en précis° en temps. Ce schéma s'appelle Crank-Nicolson, et on mq l'ordre est 2 (cf : DL d'ordre supérieur)

Exo 2 : Schéma de Yean : implicite

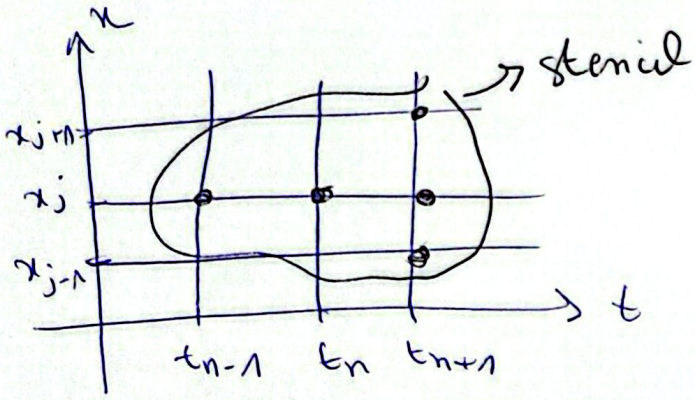
$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0,$$

$n+1$, $n+1$, $n+1$, n, $n-1$

Stencil de long. 3 en t

$n = 0, \dots N$

$j = 0, \dots J$



DL en (t_{n+1}, x_j) : - à l'ordre 3 en t :

$$u(t_n, x_j) = u(t_{n+1}, x_j) - \partial_t u(-)\Delta t + \frac{1}{2}\partial_{tt} u(-)\Delta t^2$$

$$= \frac{1}{6}\partial_{ttt} u(-)\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$u(t_{n-1}, x_j) = u(t_{n+1}, x_j) - \partial_t u(-)\, 2\Delta t$$

$$+ \frac{1}{2}\partial_{tt} u(-)(-2\Delta t)^2$$

$$- \frac{1}{6}\partial_{ttt} u(-)\cdot 8\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\Rightarrow \frac{3u(t_{n+1}, x_j) - 4u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j)}{\Delta t}$$

$$3u(t_{n+1}, x_j) \quad | \quad -4u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j)$$

Scanned with CamScanner

$= 3u(t_{n+1}, x_j) - 4u(t_n$

$*) \; -4u(t_n, x_j) = -4u(t_{n+1}, x_j) + 4\partial_t u \Delta t - 2\partial_{tt} u \Delta t^2 + \frac{2}{3}\partial_{ttt} u \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$

$*) \; -4u(t_n, x_j) + 3u(t_{n+1}, x_j)$

$= -u(t_{n+1}, x_j) + 4\partial_t u \Delta t - 2\partial_{tt} u \Delta t^2 + \frac{2}{3}\partial_{ttt} u \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$

$\hookrightarrow = \dfrac{2\partial_t u \Delta t - \frac{2}{3}\partial_{ttt} u \Delta t^3 + O(\Delta t^4)}{\Delta t}$

$= 1 \times \partial_t u - \frac{1}{3}\partial_{ttt} u \, \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \Big|_{(t_{n+1}, x_j)}$

À l'ordre 4 en x :

$u(t_{n+1}, x_j \pm 1) = u(t_{n+1}, x_j) \pm \partial_x u(-)\Delta x + \frac{1}{2}\partial_{xx} u(-)\Delta x^2 + \frac{1}{6}\partial_{xxx} u(-)\Delta x^3 + \frac{1}{24}\partial_{xxxx} u(-)\Delta x^4 + O(\Delta x^5)$

Ex 03 : Schéma de Dufort-Frankel : $\simeq -2u_j^n$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

DFcentré

DL ordre 3 ent, u en x : avec la remarque préliminaire suivante :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \nu \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta x^2}$$

DL en ordre 2 en t

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) \pm \partial_t u \, \Delta t + \partial_{tt} u \frac{\Delta t^2}{2} \pm \partial_{ttt} u \frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4)$$

$u_j^{n\pm1}$

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2\partial_t u \Delta t + 2\partial_{ttt} u \frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4)$$

$$\boxed{\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \partial_t u + \partial_{ttt} u \frac{\Delta t^2}{3} + O(\Delta t^3)} \quad (**)$$

DL en ordre 4 en x :

$$u(t_n, x_j \pm 1) = u(t_n, x_j) \pm \partial_x u \, \Delta x + \partial_{xx} u \frac{\Delta x^2}{2} \pm \partial_{xxx} u \frac{\Delta x^3}{6} + \partial_{x^4} \frac{\Delta x^4}{} + O(\Delta x^5)$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \frac{u(t_{n+1}, x_{j+1}) - \cdots}{\Delta x^2} = \partial_{xx} u + \frac{1}{12} \partial_{xxxx} u \, \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \Big| (t_{n+1}, x_j)$$

$$= \partial_{xx} u + \partial_{txx} u \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \partial_{ttxx} u \, \Delta t^2 + O(\Delta t^3) + \frac{1}{12} \left(\partial_{x^4} u + \partial_{tx^4} u \, \Delta t + O(\Delta t) \right) \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \Big|$$

$$\Rightarrow \epsilon_j^n = \partial_t u - \partial \partial_{xx} u + \frac{1}{2} (\partial_{tt} u - \theta \partial_{t x^2}^{u} \partial_{tt} u) \Delta t$$

$$(1/2 - \theta) \partial_{tt} u$$

$$0 \text{ si } \theta = 1/2$$

$$+ \left(\frac{1}{6} \partial_{t^3} u - \theta \partial \frac{1}{2} \partial_{t^2 x^2} u \right) \Delta t^2 \Big|$$

$$\frac{1}{2} \partial_{t^3} u \qquad \Big| (t_n, x_j)$$

$$+ \cdots$$

$$\epsilon_j^n = -\frac{1}{12} \partial_{t^3} u \, \Delta t^2 \Big| (t_n, x_j)$$

ordre 2 (et pas plus ! ln t)

a) $u_{j+1}^n + u_{j-1}^n = 2u(t_n, x_j) + \partial_{xx}u\,\Delta x^2 + \partial x^4 \frac{\Delta x^4}{12} + O(\Delta x^5)$

$u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n = \partial_{xx}u\,\Delta x^2 + \partial x^4 \frac{\Delta x^4}{12} + O(\Delta x^5)$

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \partial_{xx}u + \partial x^4 \frac{\Delta x^2}{12} + O(\Delta x^4)$$

(*): $\rightarrow \dfrac{u(t_{n+1}, x_j) - 2u(t_n, x_j) + u(t_{n-1}, x_j)}{\Delta x^2}$

$= \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\,\partial_{tt}u + O\left(\dfrac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right)\Big|_{(t_n, x_j)}$

① On a : $E_j^n = \underbrace{\partial_t u + \partial_{t^3} u \frac{\Delta t^2}{6} + O(\Delta t^3)}_{=0,\ \text{éq. aux dérivées partielles}}$

$- \partial\left(\partial_{xx}u + \frac{1}{12}\partial_{x4}u\,\Delta x^2 + O(\Delta x^3)\right)$

$+ \partial\left(\partial_{tt}u \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right)\right)$

+ Consistance conditionnelle : sous la condit° que Δt est petit par rapport à Δx, il que : $\frac{\Delta t}{\Delta x} \to 0$, on a bien consistance. Parce,

Scanned with CamScanner

si $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq$ cte (cf. $\sigma = \frac{\partial \Delta t}{\Delta x^2} \leq$ cte --) on a :

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} = \Delta t \cdot \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}_{\leq \text{cte}} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{(\Delta x \to 0)} 0$$

Rq : La modificat° du terme ∂u_j^n par $u_j^{n+1} + u_j^{n-1}$ (qui dégrade la consistance en faisant apparaître le terme en $\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$) est justifiée par l'étude de stabilité : sans cette modif. le schéma :

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\partial \Delta t} - \partial \cdot \frac{u_{j+1}^n - \partial u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

serait consistant d'ordre $2 > 1$ en t et ∂ en x -- mais instable ! (TD3)

Rq sur θ-Schéma (eq 01) : $\theta = \frac{1}{2}$ / Crank-Nicolson

$$\cdot u(t_{n+1}, x_j) = u + \partial_t u \Delta t + \frac{1}{2} \partial_{tt} u \Delta t^2 + \frac{1}{6} \partial_{t^3} u \cdot \Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad \Big| (t_n, x_j)$$

$$\cdot u(t_{n+1}, x_j \pm 1) = u \pm \partial_x u \Delta x + \frac{1}{2} \partial_{x^2} u \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} \partial_{x^3} u \Delta x^3 + \frac{1}{\partial 4} \partial_{x^4} u \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad \Big| (t_{n+1}, x_j)$$

Scanned with CamScanner