Ch. 4 – Cas simple

Considérons l'exemple traité à la fin du Ch. 3 :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,dt \to \min, \quad \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = -1, \quad x(1) = 0.$$

On sait qu'on est dans le cas normal ($p^0 = -1 < 0$) de sorte que $u(t) = p(t)$ (max. H). On définit $h(x,p) := H(x,p,u(x,p))$.

Clairement, $\frac{\partial h}{\partial x}(x,p) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,p,u(x,p)) + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial u}(x,p,u(x,p))}_{0} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,p)$

$= \frac{\partial H}{\partial x}(x,p,u(x,p))$

car, pour tout (x,p), $u(x,p)$ maximise $H(x,p,\cdot)$ sur $u \in \mathbb{R}$

De même $\frac{\partial h}{\partial p}(x,p) = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p,u(x,p))$. Donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t),p(t),u(t)) = \nabla_p h(x(t),p(t)) \\ \qquad\qquad \uparrow u(t) = u(x(t),p(t)) = p(t) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(\text{——}''\text{——}) = -\nabla_x h(x(t),p(t)) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on a un "vrai" système hamiltonien défini par h (le hamiltonien maximisé). Le système aux deux bouts associé est équivalent à trouver $p_0 \in \mathbb{R}$ tq $x(1,p_0)=0$, où $x(t,p_0)$ désigne la solution au temps t de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p h(x(t),p(t)), \quad x(0)=-1, \quad p(0)=p_0 \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x h(\text{——}''\text{——}) \end{cases}$$

$H_f = \underbrace{1}_{\text{ici}}$ $\underbrace{0}_{\text{ici (ici la)}}$

└ équation/plus de lin : $S(p_0)=0$ où $S(p_0) := x(H_f,p_0) - x_f$.

Rq. i) la dérivée de la fonction de tir, $S'(p_0)$, s'obtient en appliquant le th. des fonctions implicites :

$$F(z, z_0) = \begin{bmatrix} \dot{z} - \vec{h}(z) \\ z(0) - z_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{h}(\underbrace{z}_{z=(x,p)}) = \begin{bmatrix} D_p h(z) \\ -D_x h(z) \end{bmatrix}$$

$\varphi \Rightarrow \varphi(z_0) = "z(z_0)"$

Comme $\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{z}, \bar{z}_0)$ est inversible, $\exists\ z_0 \longmapsto z(z_0)$, fonction implicite,

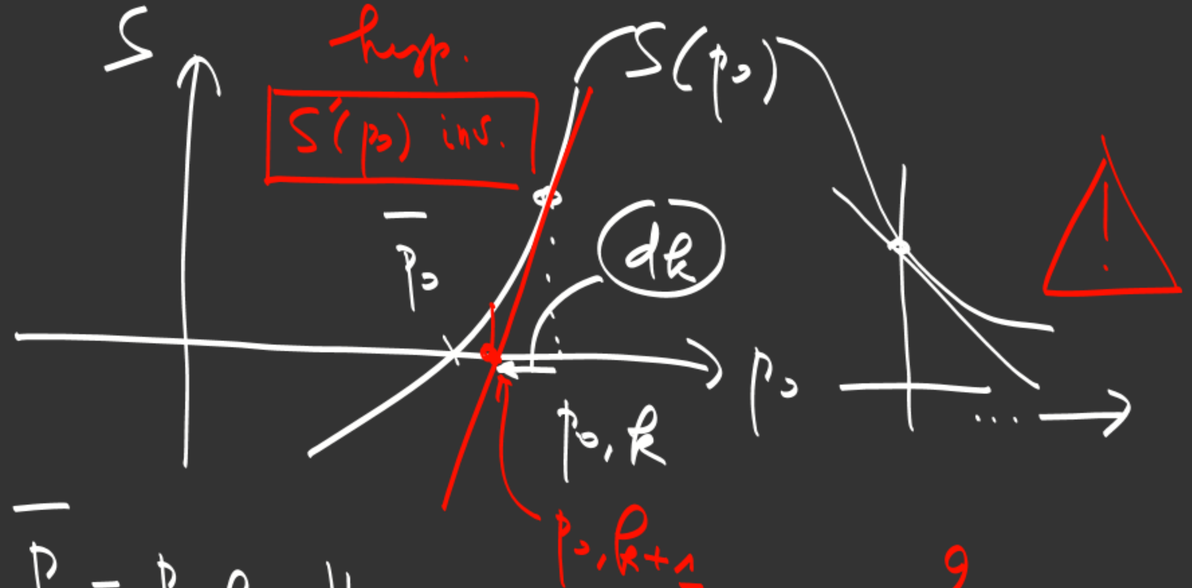
et $\frac{\partial F}{\partial z}(z(z_0), z_0) \cdot z'(z_0) + \frac{\partial F}{\partial z_0}(z(z_0), z_0) = 0 \rightsquigarrow z'(z_0)$ comme sol. du système "linéarisé" : $(z'(z_0) \cdot \delta z_0)_{t=1} = \delta z(1)$ où

$$\begin{cases} \delta z(t) = \vec{h}'(z(z_0)(t)) \cdot \delta z(t) \\ \delta z(0) = \delta z_0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Φ. TP2

ii) en pratique, on peut aussi faire des DF (différences finies) sur S en adaptant le pas des DF et le pas de l'intégrateur ODE.

iii) on "fait du Newton sur $S(p_3) = 0$ (en évaluant S par schéma type Runge-Kutta) – d'où la nécessité de disposer $S'(p_3)$:



Pas de Newton d_k :

$$S(p_{3,k}) + S'(p_{3,k}) \cdot d_k = 0$$

(S' : f. i)-ii) ; d_k : $p_{3,k+1} - p_{3,k}$)

$$\Leftrightarrow S'(p_{3,k}) \cdot d_k = -S(p_{3,k}) : SL$$

$$\| \bar{p}_3 - p_{3,k+1} \| \leq C \| \bar{p}_3 - p_{3,k} \|^2$$: CV quadratique... qd CV ! On doit partir "assez près" (CV locale).

$$(A \cdot x_k + b) + A \cdot d_k = 0$$

$$\Rightarrow d_k = -A^{-1}(A \cdot x_k + b)$$

$$\Rightarrow d_k = -x_k - A^{-1} b \Rightarrow x_{k+1} = -A^{-1} b$$

fact. (LU...)

$f(x,y) = 0$

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

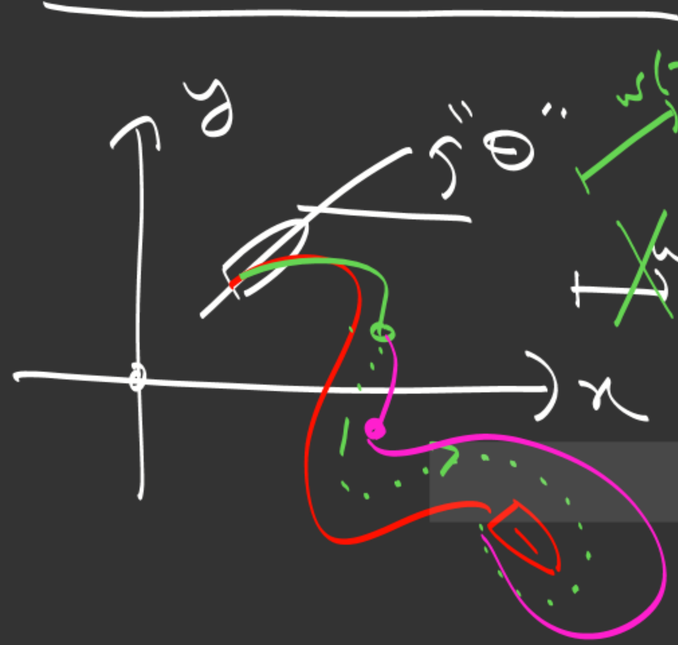
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ inv. $\Longrightarrow$ exists $\Rightarrow$ יש סביבה של y_0

$y \longmapsto \varphi(y) = x(y)$

$f(x(y), y) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-) \cdot x'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(-) = 0$

Ch. 5 - MPC (= Model Predictive Control)



$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = u, \quad |u(t)| \le 1 \end{cases}$$

θ = arg. vitesse / trajectoire cam

↦ f. Ch. ←

$J \to \min$ (+ CL)

→ f. Tps