Ch. 3 - PMP (fin)

Exo (suite et fin) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ \qquad\quad = -x(t) + p(t) \quad (\text{f. max } H \text{ et } p^0 < 0) \\ \dot{p}(t) = p(t) \end{cases}$$

$x(0) = -1, \; x(1) = 0$

$\Rightarrow p(t) = C \cdot e^{t}$ avec $C = p(0)$

$= p_0 \cdot e^{t}$ $\quad = : p_0$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -x(t) + p_0 \cdot e^{t}$

i) **équ. homogène** : $\dot{x}(t) = -x(t) \Rightarrow x(t) = C \cdot e^{-t}$

ii) <u>Équ. avec second membre</u> : on fait varier la cte pour chercher une sol. sous la forme $x(t) = C(t) \cdot e^{-t}$:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + p_0 \cdot e^{t}$$

$$\Rightarrow \left(\dot{C}(t) - C(t)\right) \cdot e^{-t} = -C(t) \cdot e^{-t} + p_0 \cdot e^{t}$$

$$\Rightarrow \dot{C}(t) = p_0 \cdot e^{2t}$$

$$\Rightarrow C(t) = \frac{1}{2} p_0 \cdot e^{2t} + l \quad ; \quad x(0) = -1 \Rightarrow C(t) \cdot e^{-t} = \left(\frac{1}{2} p_0 \cdot e^{2t} + l\right) \cdot e^{-t} \Big|_{t=0} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p_0 + l = -1$$

$$\Rightarrow l = -\frac{1}{2} p_0 - 1$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} p_0 \cdot e^{2t} - \frac{1}{2} p_0 - 1\right) \cdot e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2} p_0 \left(e^{t} - e^{-t}\right) - e^{-t} = p_0 \cdot \sinh t - e^{-t}$$

Reste à déterminer p_0, la cond. initiale manquante, de façon à tomber sur la cible $x(1) = 0$ (méthode de tir, cf. § 4.) :

$$0 = x(1) = p_0 \cdot \operatorname{sh} 1 - e^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{e \cdot \operatorname{sh} 1} = \frac{2}{e^2 - 1}$$

Conditions de transversalité : Soit à résoudre

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f]$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n \\ x(t_f) \in X_f \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$$

(par ex. : $X_0 = \{x_0\}$ et $X_f = \{x_f\}$ comme déjà vu)

Si (x,u) (et t_f, s'il est libre) est solution, avec $u \in L^\infty_m([0,t_f])$ (à val. dans $\mathbb{R}^m$) et $x \in W^{1,\infty}_n([0,t_f])$ (ie x Lipschitz), alors il existe $(p^0,p) \neq (0,0)$ avec $p^0 \leq 0$ (cte) et $p \in W^{1,\infty}_n([0,t_f])$ tq :

i) $\dot{p}(t) = -D_x H(x(t),p(t),u(t))$

avec $H(x,p,u) := p^0 f^0(x,u) + (p \mid f(x,u))$

ii) $H(x(t),p(t),u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t),p(t),v)$, p.p. $t \in [0,t_f]$

iii) $p(0) \perp T_{x(0)} X_0$ et $p(t_f) \perp T_{x(t_f)} X_f$

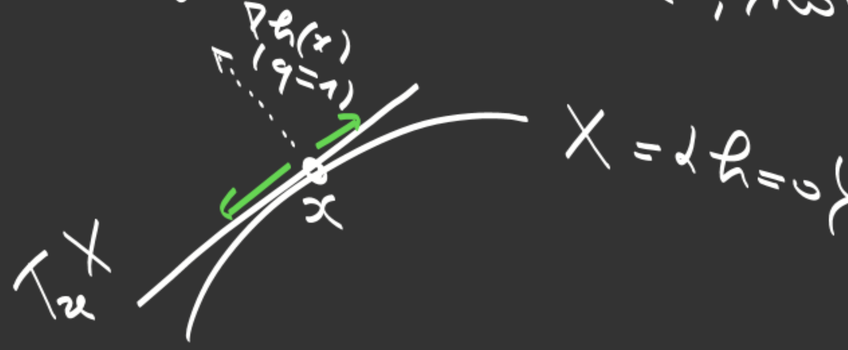
condition de transversalité

(Rappel : espace à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définie par une submersion : soit $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ $(q < n)$; on dit que h est une submersion en x si $\underbrace{\operatorname{rg} h'(x)}_{\dim \operatorname{Im} h'(x)} = q$ (i.e. le rang est max).

Soit $X := h^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^q}\})$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$; soit $x \in X$, si h est une submersion en x, on définit l'espace tangent à X en x, noté $T_x X$, comme

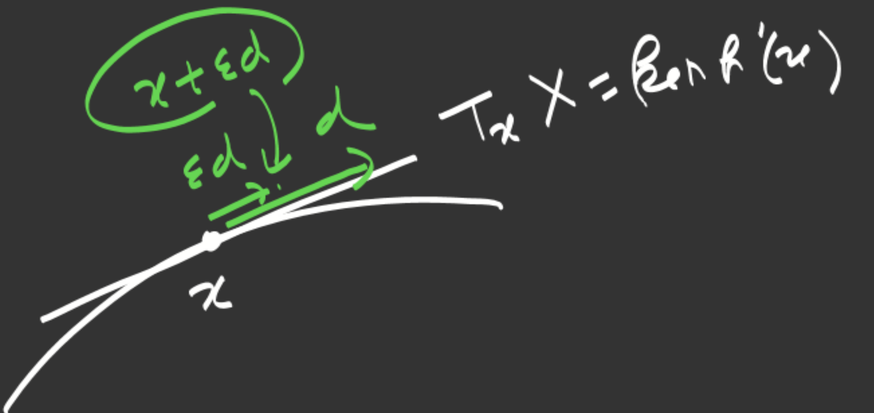
$$\boxed{T_x X := \ker h'(x)}$$



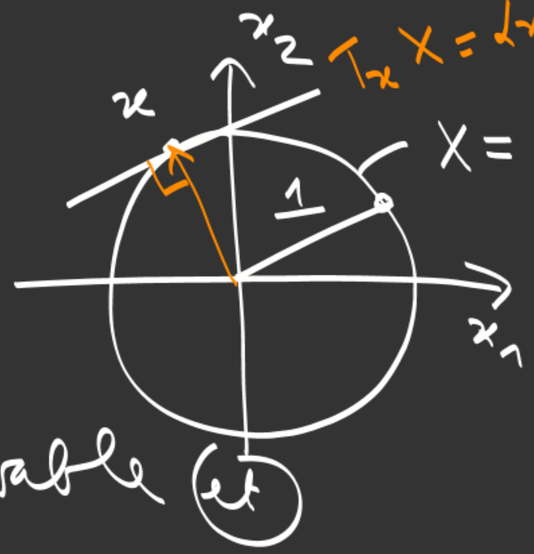
Rq (interprétation) : si $d \in \ker h'(x)$,

$$h(x + \varepsilon d) = \underbrace{h(x)}_{0 \text{ car } x \in X} + \underbrace{h'(x) \cdot \varepsilon d}_{0,\ \text{cf. } d \in \ker h'(x)} + o(\varepsilon)$$

$\Rightarrow x + \varepsilon d \in X$ "à l'ordre 1".



Ex : i)



$X = S(0,1) = h^{-1}(\{0\})$

avec $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \|x\|^2 - 1$

h est dérivable (et $\mathcal{C}^1$)

$h'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} = 2\,{}^t x$ (cf. $\nabla h(x) = 2x$)

Donc :

- $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ h'(x) = 1$ (max) si $x \neq (0,0)$; or, $x \in X \Rightarrow x \neq (0,0)$, donc h submersion en tout $x \in X$
- $\Rightarrow T_x X = \ker h'(x) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid 2(x|d) = 0\}$ $\perp d_x$

Même chose en dim n : $X = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

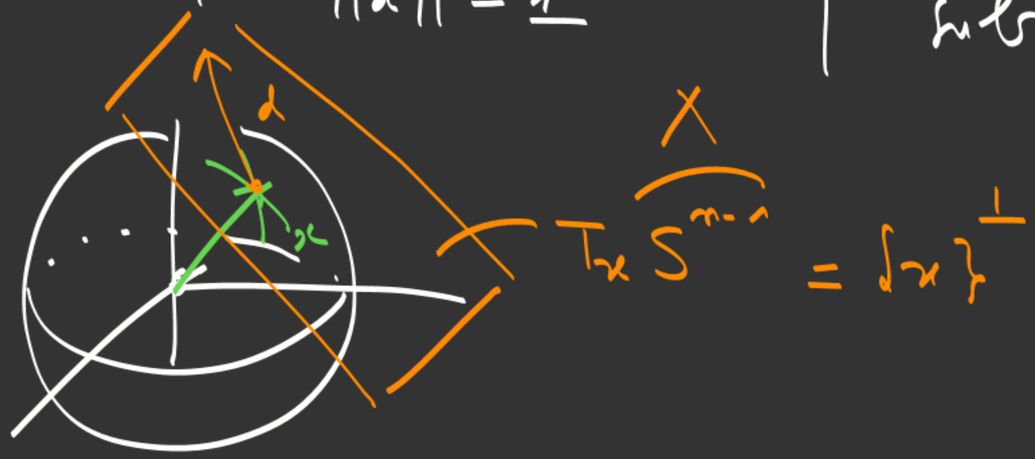
$= h^{-1}(\{0\})$ avec

$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(q = 1)$

$x \longmapsto \|x\|^2 - 1$

On a encore $h'(x) = 2 \cdot {}^t x$,

submersion en tout pt de $X = S^{n-1}$

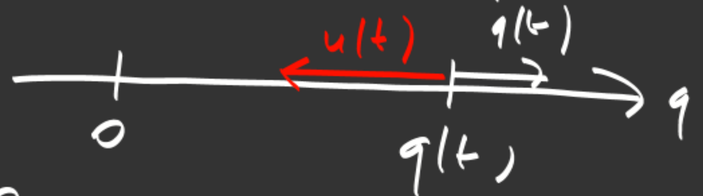


ii) Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, $b \in \mathbb{R}^q$ $(q < n)$;

Avec $h(x) := Ax - b$, $X = h^{-1}(\{0\})$; $h'(x) = A$; si on suppose $\operatorname{rg} A = q$ (rg max),

$T_x X = \ker A$

Ex. : name de métho (autres CL) :

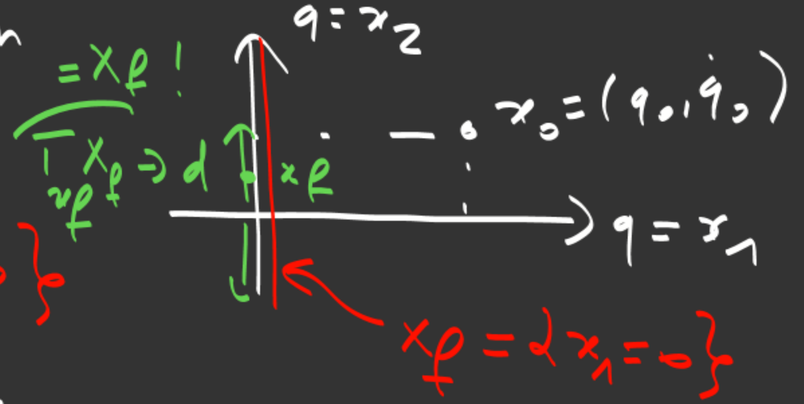


$\ddot{q}(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq 1$

$tf \longrightarrow \min$

i) $q_0, \dot{q}_0$ fixés, $q(tf) = 0$, $\dot{q}(tf)$ libre

$X_0 = \{x_0\}$ $\qquad X_f := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$

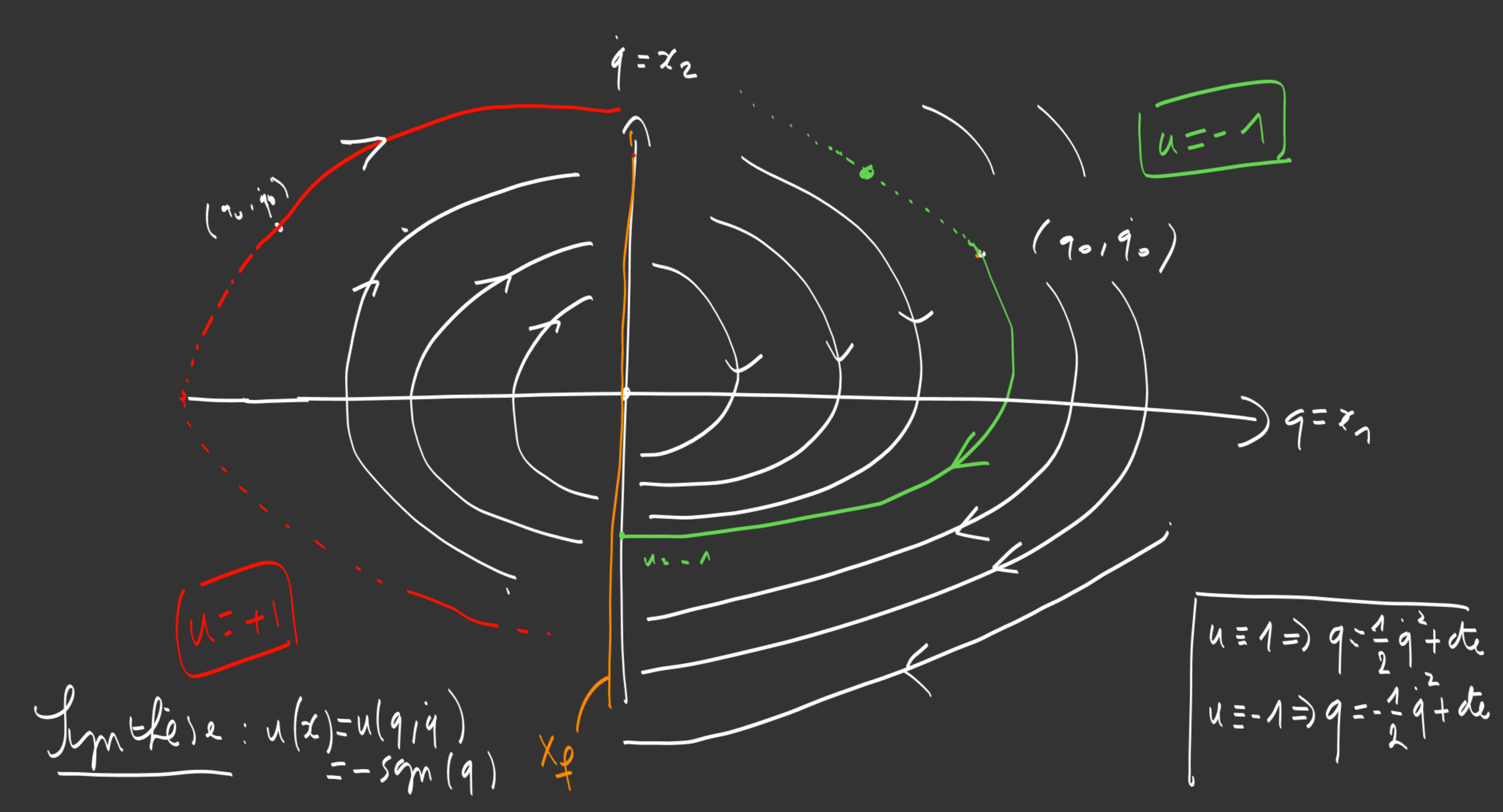


(R_q : $\dot{x}_0 \quad T_{x_0}\overbrace{\{x_0\}}^{X_0} = \{0\}$ $\quad = h^{-1}(\{0\})$ avec

$\Rightarrow p(0) \perp T_{x_0} X_0$: aucune info !) $\qquad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1$ $\quad (\text{ie } h = [1 \ 0])$

On a $h'(x) = [1 \ 0] \ (= h)$: rg 1 (max)

$\Rightarrow T_x X_f = \ker h'(x) = \ker [1 \ 0] = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 = 0\} \ (= X_f)$



Synthèse : $u(x) = u(q, \dot{q})$
$= -\text{sgn}(q)$

$u \equiv 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + cte$

$u \equiv -1 \Rightarrow q = -\frac{1}{2}\dot{q}^2 + cte$

On a $p(t_f) \perp T_{x(t_f)} X_f$ $(= X_f \dots) \Rightarrow \boxed{p_2(t_f) = 0}$

$(\forall d \in T_{x(t_f)} X_f) : (p(t_f) \mid d) = 0$

$\Rightarrow (\forall d \in \mathbb{R}^2, d_1 = 0) : p_1(t_f) \cdot \cancel{d_1}^{\,0} + p_2(t_f) \cdot d_2 = 0$

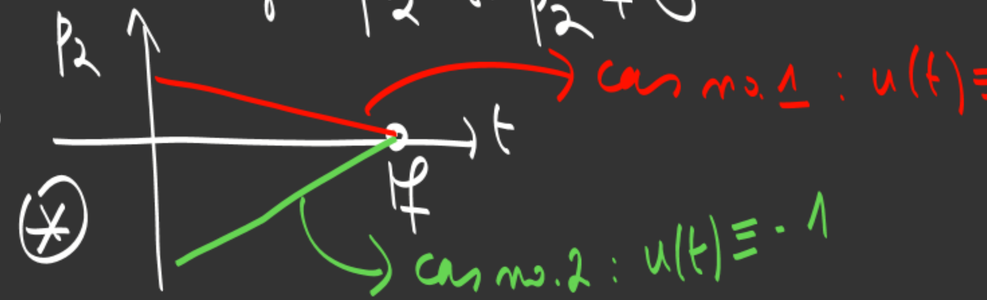
$\Rightarrow p_2(t_f) = 0.$)

Comme les pts i) et ii) du PMP restent vrais, on a encore

$H = p^0 \cdot 1 + p_1 x_2 + p_2 u$ avec $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 = -p_1$ ($\Rightarrow p_2$ affine)

et $u = \operatorname{sgn} p_2$ si $p_2 \neq 0$

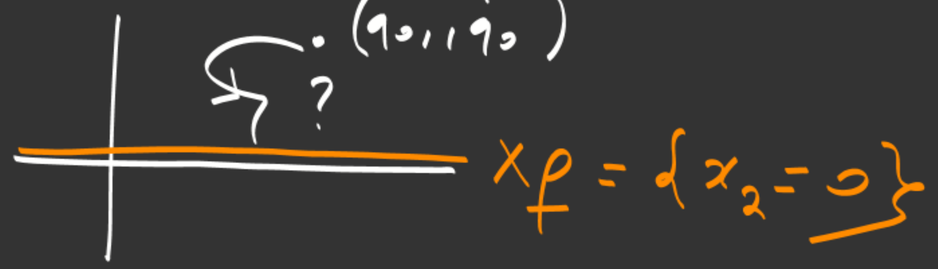
$\Rightarrow$



pas de commutation

(*) $p_2 \equiv 0$ interdit ($\Rightarrow p \equiv 0$ et $p^0 = 0$, $\forall\, H = 0 \dots$)

ii) même question avec $q(H_f)$ libre et $\dot{q}(H_f) = 0$:



$X_f = h^{-1}(\{0\})$ avec $h(x) := x_2$

h submersion, $h'(x) = [0 \ 1]$ $(= h)$

et $T_x X_f = \{ d \in \mathbb{R}^2 \mid d_2 = 0 \}$ $(= X_f)$

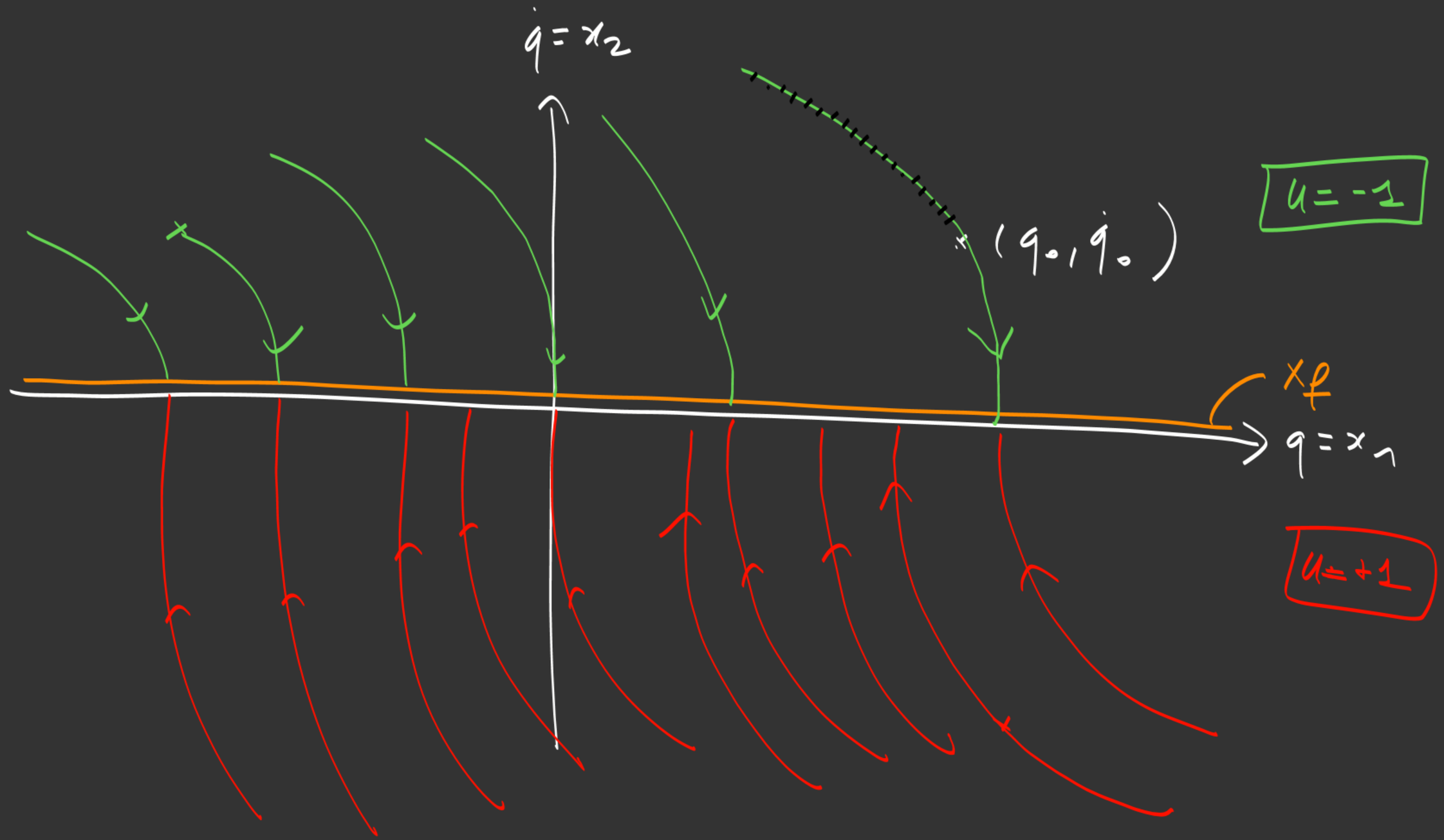
$\Rightarrow p(H_f) \perp \underbrace{T_{x(H_f)} X_f}_{(= X_f \ldots)}$

$\Rightarrow P_2(t_f) = 0$

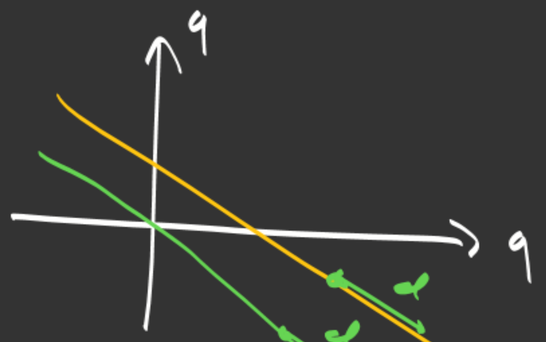
$\Rightarrow a = \text{sign}(P_2)$ si $P_2 \neq 0$

$P_2 = -P_2 \Rightarrow P_2 = \text{cste} \neq 0$ (sinon $(P_1, P_2) = (0,0) \Rightarrow p = 0$ car $H = 0$)

Pas de commutation


$\dot{q} = x_2$
$(q_0, \dot{q}_0)$
$u = -1$
x_f
$q = x_1$
$u = +1$

Rq : plus généralement, si $\alpha q(H_f) + \beta \dot{q}(H_f) + \gamma = 0$ (avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$). Écrire la condition de transversalité associée



$$x_f = h(\{0\})$$

$\left(f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma, \quad h'(x) = [\alpha \ \beta] \neq [0\ 0] \right)$

x_f : $\alpha q + \beta \dot{q} + \gamma = 0$

$T_x x_f = \{ d \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha d_1 + \beta d_2 = 0 \}$

(droite vectorielle $\parallel x_f$)

$\Rightarrow p(H_f) \perp T_x x_f$

ie $p(H_f) \in \{ \mathbb{R} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \}^{\perp\perp} = \mathrm{Vect} \{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \}$

$\Rightarrow \det(p(H_f), \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}) = 0$

ie $\beta p_1(H_f) - \alpha p_2(H_f) = 0$.