Ch. 3 - PMP (suite)

Exo name de métro (fin) :

Premier cas ($U(t) = -1$ puis $U(t) = 1$) :

$\dot{q}(t) = \dot{q}_0 - t$

$q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{1}{2} t^2$

à $t = \bar{t}$, $(q(\bar{t}), \dot{q}(\bar{t})) \in \Gamma_+$ donc :

$q(\bar{t}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2(\bar{t})$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{q}_0 - \bar{F}\right)^2 = q_0 + \dot{q}_0 \bar{F} - \frac{1}{2}\bar{F}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \dot{q}_0\bar{F} + \frac{1}{2}\bar{F}^2 = q_0 + \dot{q}_0\bar{F} - \frac{1}{2}\bar{F}^2$$

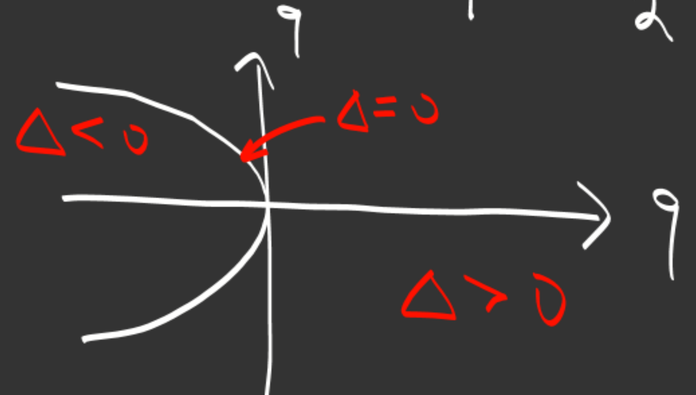
$$\Rightarrow \bar{F}^2 + \bar{F}(-2\dot{q}_0) - q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4\dot{q}_0^2 - 4\left(-q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2\right)$$

$$= 4\dot{q}_0^2 + 4q_0 - 2\dot{q}_0^2$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0\right)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow q_0 = -\frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$



$$\bar{F}_{1,2} = \frac{2\dot{q}_0 \pm 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}}{2} = \dot{q}_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$$

On on veut $\bar{F} \geq 0$, alors on garde $\bar{F} = \dot{q}_0 + \sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$

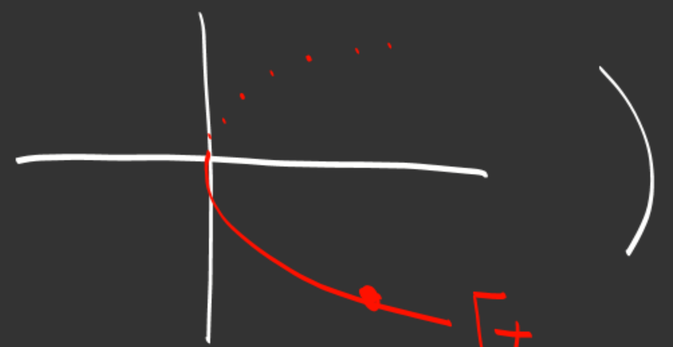
(NB. $\bar{t} = 0$, ie $u \equiv +1$, pas de commutation, si

$$\dot{q}_0 + \sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0} = -\dot{q}_0$$

$$\Leftrightarrow \dot{q}_0 \leq 0 \text{ et } \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0 = \dot{q}_0^2$$

ie : $q_0 = \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$ avec $\dot{q}_0 \leq 0$



Seconde phase :

$\Delta t = t_f - \bar{t} = -\dot{q}(\bar{t})$, cf. $u = +1$ entre $\bar{t}$ et t_f ($\Rightarrow -\dot{q}(t) = t_f - t$)

$\dot{q}(t_f) = 0$

Comme $\dot{q}(\bar{t}) = \dot{q}_0 - \bar{t} = -\sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$

$$\Rightarrow t_f = \bar{t} - \dot{q}(\bar{t})$$
$$= \bar{t} + \sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$$
$$= \dot{q}_0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$$

Par symétrie $(q, \dot{q}) \to -(q, \dot{q})$:

$$t_f(q_0, \dot{q}_0) = \dot{q}_0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 + q_0}$$

dans le cas $-1/+1$

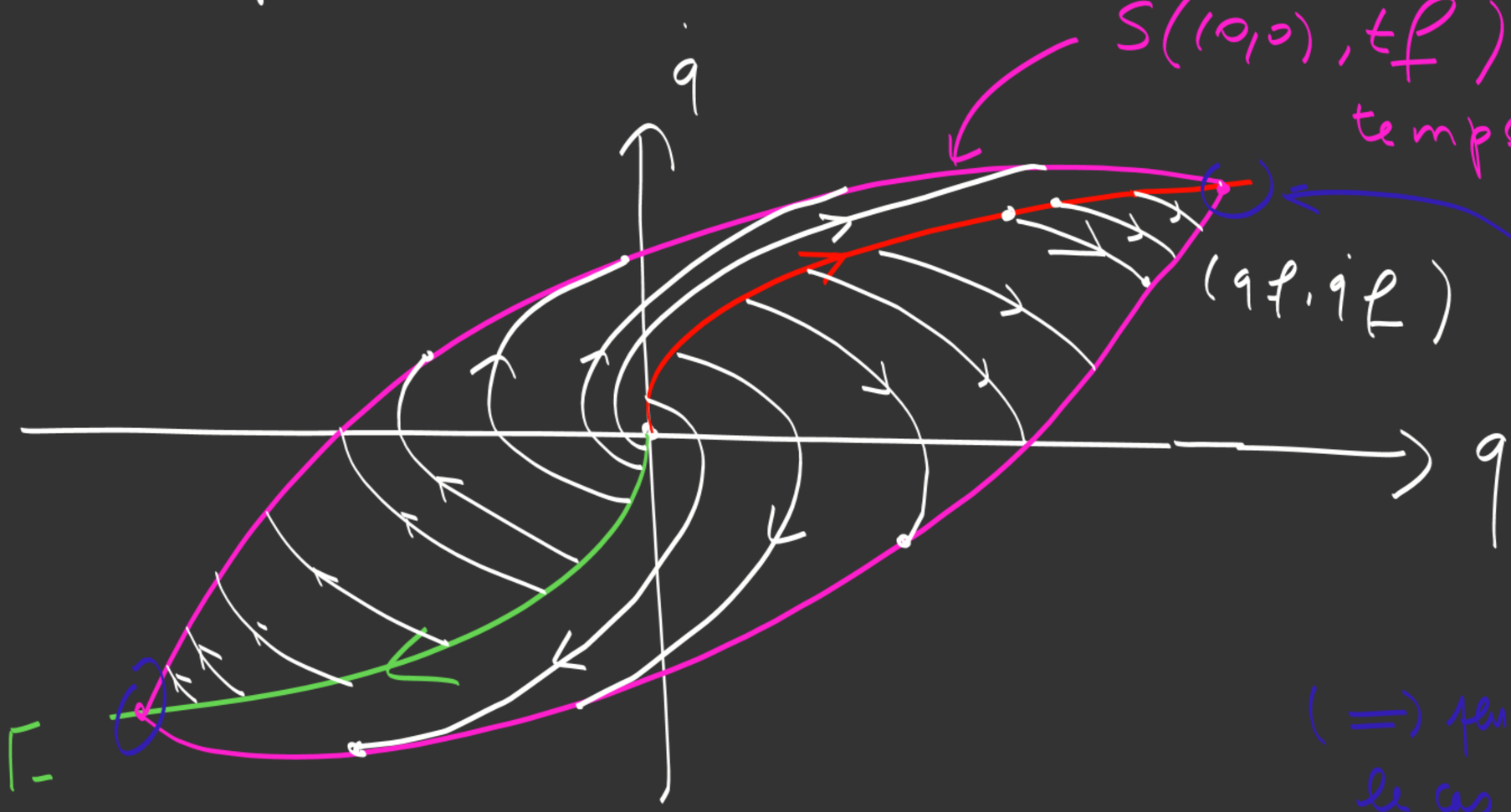
$$= -\dot{q}_0 + 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - q_0}$$

— " — $+1/1$.

Rq. i) cette fonction, $(q_0, \dot{q}_0) \longmapsto tf(q_0, \dot{q}_0)$, appelée "fonction valeur" du pb, est C^0 mais pas C^1; elle est néanmoins solution d'une EDP (du premier ordre) en un sens "faible" (on parle de "solution de viscosité") appelée EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

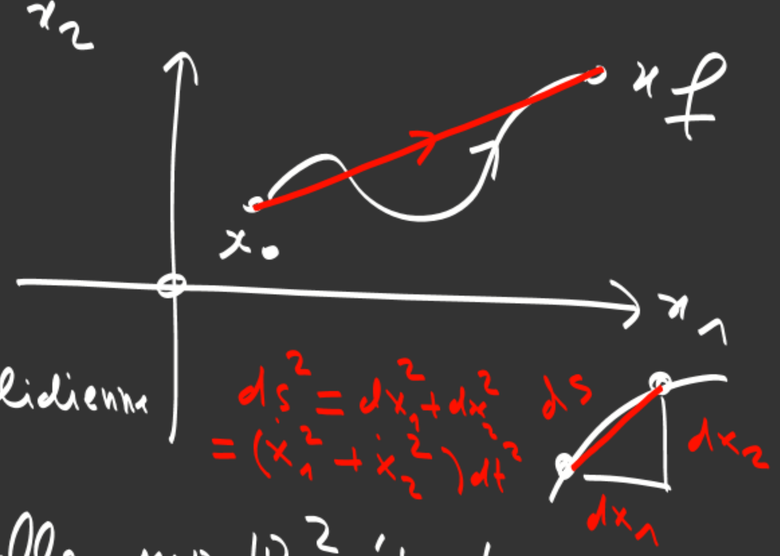
ii) on peut renverser et se poser la question "métrique" suivante: partant de $(0,0)$, quel est l'ensemble des points de l'espace des phases $(q, \dot{q})$ qu'on peut atteindre en temps min égal (sphère) ou inférieur ou égal (boule) à $tf > 0$ fixé ?

De façon analogue au cas précédent ($(q_0, \dot{q}_0) \longrightarrow (0,0)$), on a la synthèse suivante :



pts singuliers : la courbe qui définit la sphère n'est pas lisse même si tf petit
(⇒ plus complexe que le cas Riemannienne...)

Exo. Courbes de longueur min dans le plan (pour la métrique usuelle) : on cherche, parmi toutes les courbes paramétrées $t \longmapsto x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, Lipschitz ($\exists$ $\mathcal{C}^1$) celles qui minimisent la longueur (pour la norme usuelle) entre x_0 et x_f, deux pts fixés (NB : la norme



usuelle sur $\mathbb{R}^2$ étant invariante par translation, on peut supposer $x_0 = (0,0)$) :

$$\int_0^{t_f} \|\dot{x}(t)\|\,dt = \int_0^{t_f} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}\;.\,dt \longrightarrow \min$$

avec (Lip.) $x : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (t_f libre)

$x(0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$

On peut choisir de paramétrer ces courbes par leur abscisse curviligne, s, auquel cas $t = s$ et :

$$\int_0^{tf} \underbrace{\|\dot{x}(t)\|}_{=1 \text{ si } t=s} \, dt = tf \quad (\text{temps} = \text{longueur})$$

avec $\|\dot{x}(t)\| = 1$

ie $u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$

et $\dot{x}(t) = u(t)$

$\Rightarrow$ on ramène ainsi le pb de longueur min à :

$$(1) \begin{cases} tf \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) = u(t), \; t \in [0, tf] \\ u_1^2(t) + u_2^2(t) \underbrace{= 1}_{\rightsquigarrow \leq 1} \end{cases}$$

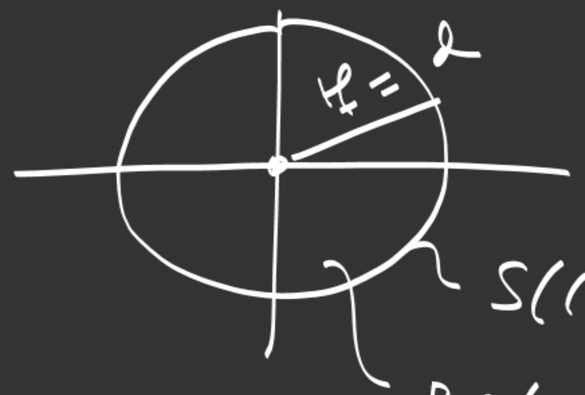
pb convexifié (2)

on convexifie : $u(t) \in U$,

$U = B_f((0,0), 1)$

(compact convexe)

Rq : i)



$$S((0,0), d) = \{x_f \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{t_f(x_f)}_{\|x_f\|} = d\} \qquad d > 0$$

$$B_f((0,0), d) = \{x_f \in \mathbb{R}^2 \mid \|x_f\| \leq d\}$$

ii) idem en dim $n \geq 1$ quelconque : courbes de longueur (usuelle, ie euclidienne) min $\equiv$ segments.

Exo.

$$\begin{cases} \int_0^{t_f} u^2(t)\,dt \longrightarrow \min \quad \leftarrow \text{et } t_f \text{ fixé} = 1 \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = -1, \ x(t_f) = 0 \qquad (n = m = 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{pb de Lagrange :} \\ f^0(x,u) = u^2 \\ f(x,u) = -x + u \\ U = \mathbb{R} \end{cases}$$

On admet l'existence de solution.

1. Hamiltonien :

$$H(x, p, u) = p^0 \cdot f^0(x, u) + (p \mid f(x, u))$$
$$= p^0 \times u^2 + p(-x + u)$$

2. Système adjoint

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = +p(t)$$

3. Maximisation de H

$$p^0 u^2 + pu - px \longrightarrow \max_{u \in \mathbb{R}}$$

avec $x, p \in \mathbb{R}$ fixés, et $p^0 \leq 0$

Rq. : i) on peut mq on a existence de sol. pour (2) ; on vérifiera a posteriori que (2) a une sol. unique (calculée à l'aide du PMP) et que celle-ci vérifie $\|u(t)\| = 1$ pour tout t : comme elle vérifie les contraintes du pb (1), elle est nécessairement l'unique sol. de (1).

Lemme : (1) $\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in C_1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in C_2 \supset C_1 \end{cases}$; si $\bar{x} \in C_1$ est solution de (2), alors $\bar{x}$ est aussi sol. de (1).

1. Hamiltonien :

$$H(x, p, u) = p^0 \cdot 1 + (p|u) = p^0 + p_1 u_1 + p_2 u_2$$

$\varphi^0(x,u) = 1$, $f(x,u) = u$

2. Système adjoint : $\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$, $\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$

$\Rightarrow p(t) = cte = a \in \mathbb{R}^2$

3. Maximisation de H : on sait que $u(\cdot)$, p.p. $t \in [0, t_f]$, doit maximiser $H(x(t), p(t), v)$ avec $\|v\| \leq 1$;

on, soient $x, p \in \mathbb{R}^2$ donnés. $H(x, p, v) = p^0 + (p|v)$.

$\|v\| \leq 1$

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$ $(p|v) \leq \|p\| . \|v\| \leq \|p\|$, et ce majorant est atteint par $\begin{cases} v = \frac{p}{\|p\|} \text{ si } p \neq 0 \\ \text{n'importe quel } v \in B_f((0,0),1) \text{ si } p = 0 \end{cases}$

↑ $\forall . \|v\| \leq 1$

Donc, p.p. $t \in [0, t_f]$, $u(t) = \dfrac{p(t)}{\|p(t)\|}$ si $p(t) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Puisque $p(t) = a$, vérifions que $a \neq (0,0)$, nécessairement. Par l'absurde : si $a = (0,0)$,

$0 = H(x(t), p(t), u(t)) = p^0 + (p(t) \mid u(t))$ $\Rightarrow p^0 = 0$

$\Rightarrow (p^0, p) = (0, (0,0))$: interdit.

t_f min $:= e$ — on a bien aussi une sol. de (1)

Donc $u(t) = \dfrac{a}{\|a\|} \in S((0,0), 1)$ avec $a \neq (0,0)$. On a :

$\dot{x}(t) = u(t) = e$

$\Rightarrow$ $x(t) = x_0 + t \cdot e$ (segment de droite de longueur $\|x_f\|$)

($x_0 = (0,0)$)

($\dot{x}_1(t) = e_1$, $\dot{x}_2(t) = e_2$)

De plus, $x(t_f) = x_f \Rightarrow t_f \cdot e = x_f$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} t_f = \|x_f\| & (\text{car } \|e\| = 1) \\ e = \dfrac{x_f}{\|x_f\|} = u(t) \end{cases}$



Mq $p^0 < 0$ (auquel cas on posera $p^0 = -1/2$), par l'absurde :
si $p^0 = 0$, nécessairement $p(t) = 0$ puisque $u(t)$ doit maximiser
p.p.t le hamiltonien, sachant que le pb $H(x,p,u) \longrightarrow \max_{u \in \mathbb{R}}$
n'a de sol. que si $p = 0$ (cf. $p \neq 0$, $\sup_{u \in \mathbb{R}} pu - px \overset{\uparrow}{=} +\infty$!)
$u = \alpha \cdot \mathrm{sgn}(p)$, $\alpha \to \infty$
Mais alors $(p^0, p) = (0,0)$ (cf. $p(t) = 0$ p.p. + p AC $\Rightarrow \vec{c} = 0 \Rightarrow p(t) = 0, \forall t$) :
interdit. D'où :

$$0 \overset{\uparrow}{=} \frac{\partial H}{\partial u} \Rightarrow -u + p = 0 \Rightarrow u = p : \text{ p.p. } t,\ u(t) = p(t).$$

cf. H str. concave
et $u \in U = \mathbb{R}$ (ouvert)