Ch. 3 - PMP (suite)

Rq (fin) : (ii) ii) la condition de maximisation du hamiltonien permet "d'éliminer u en fonction de x et p" ; en effet, supposons que le problème d'optimisation sur $\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} H(x,p,v) \longrightarrow \max \\ v \in U \subset \mathbb{R}^m \end{cases} \qquad (\text{où } x, p \in \mathbb{R}^n \text{ sont fixés})$$

possède une unique solution, notée $v(x,p)$ (cf. par exemple th. fonctions implicites appliqué à l'équation $\nabla_u H(x,p,v) = 0$ si U ouvert ... — sinon $\nabla L(x,p,u,\lambda) = 0$ si contraintes ...)

élimination de u en fonction de x et p

Alors ii) $\Rightarrow$ (p.p. $t \in [0, t_f]$) : $u(t) = \nu(x(t), p(t))$

(NB. ii) implique en particulier que, p.p. $t \in [0, t_f]$, le pb $H(x(t), p(t), v) \longrightarrow \max_{v \in U}$ possède (au moins) une solution, à savoir $u(t)$.) On se ramène à un pb aux deux bouts " (TPBVP = Two Point Boundary Value Problem) en x et p seuls : EDO dim $2n$

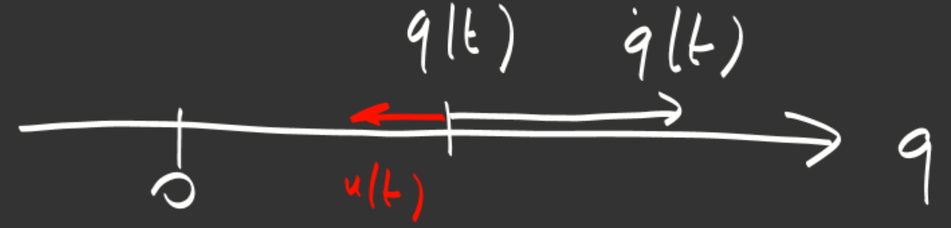
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \nabla_p H(x(t), p(t), u(t)) = \nabla_p H(x(t), p(t), \nu(x(t), p(t))) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t), u(t)) = -\nabla_x H(x(t), p(t), \nu(x(t), p(t))), \end{cases}$$

p.p. $t \in [0, t_f]$

2n cond. $x(0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$ ($\neq$ pb de Cauchy)

(et on peut montrer que ce système est vraiment hamiltonien...)

Exo. Retour dans le métro :



$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = u(t), \ t \in [0, t_f], & |u(t)| \leq 1 \\ q(0) = q_0, \ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 & (\text{ie } U = [-1, 1]) \\ q(t_f) = \dot{q}(t_f) = 0 & (\text{arrêt à l'origine}) \end{cases}$$

$t_f \to \min$

C'est un problème de Lagrange : on pose $x(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que $\dot{x}(t) = (\dot{q}(t), \ddot{q}(t)) = (x_2(t), u(t)) = f(x(t), u(t))$ avec

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, u) \longmapsto (x_2, u)$$

$f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (affine en u) $\quad (x_1, x_2, u)$

$f^0(x,u) = 1 \ (\Leftrightarrow \int_0^{t_f} \underbrace{f^0(x(t), u(t))}_{1} dt = t_f)$

Appliquons le PMP :

1. Hamiltonien du pb :

$$\begin{aligned} H(x,p,u) &= H(x_1,x_2,p_1,p_2,u) \\ &= p^0 \cdot 1 + (p \mid f(x,u)) \\ &= p^0 + p_1 x_2 + p_2 u \end{aligned}$$

2. Système adjoint : $\dot{p}(t) = -D_x H(x(t),p(t),u(t))$, ie pour $i = 1,\dots,n$,

$\dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x(t),p(t),u(t))$, soit $\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}(x(t),p(t),u(t)) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2}(\text{——}''\text{——}) = -p_1(t) \end{cases} \Rightarrow p_2$ affine

3. Maximisation du hamiltonien : considérons le pb

$$\begin{cases} H(x,p,u) \longrightarrow \max & \text{à } x,p \in \mathbb{R}^2 \text{ fixés} \\ u \in U = [-1,1] \end{cases}$$

Clairement, si $p_2 \neq 0$, le sol. unique est $u = \operatorname{sgn}(p_2) = \dfrac{p_2}{|p_2|}$;

sinon $p_2 = 0$ et tout $u \in [-1,1] = U$ est solution.

dans ce cas, il ne donne aucune info sur u...

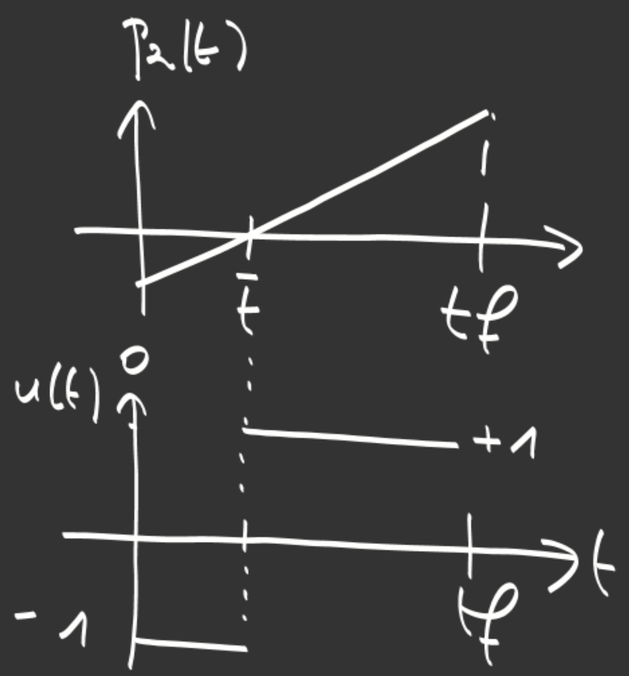
... mais : la fonction p_2 (l'état adjoint) étant affine, elle s'annule au plus une fois sauf si $p_2 \equiv 0$. Supposons que ce cas est exclu : si $p_2 \equiv 0$, $p_1 = -\dot{p}_2 \equiv 0$

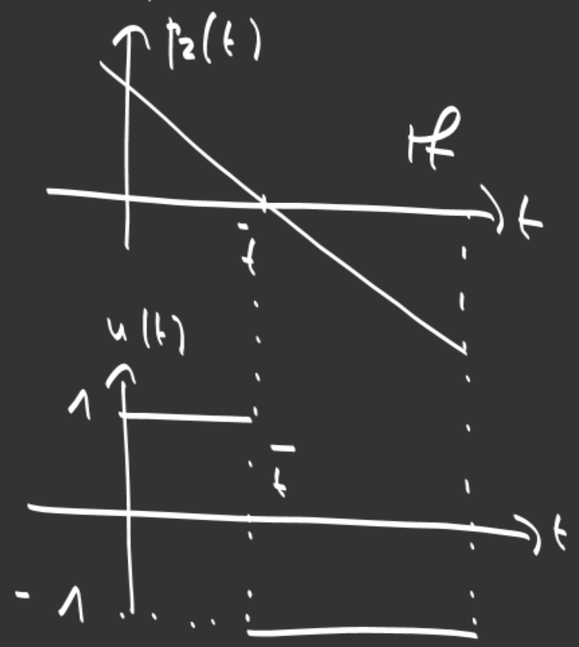
$\Rightarrow p = (p_1, p_2) \equiv (0,0)$; on $0 = H(x_1(t), \dots, p_2(t), u(t)) = p^0 + \cancel{p_1(t) \cdot x_2(t)}^{0} + \cancel{p_2(t) \cdot u(t)}^{0} = p^0$

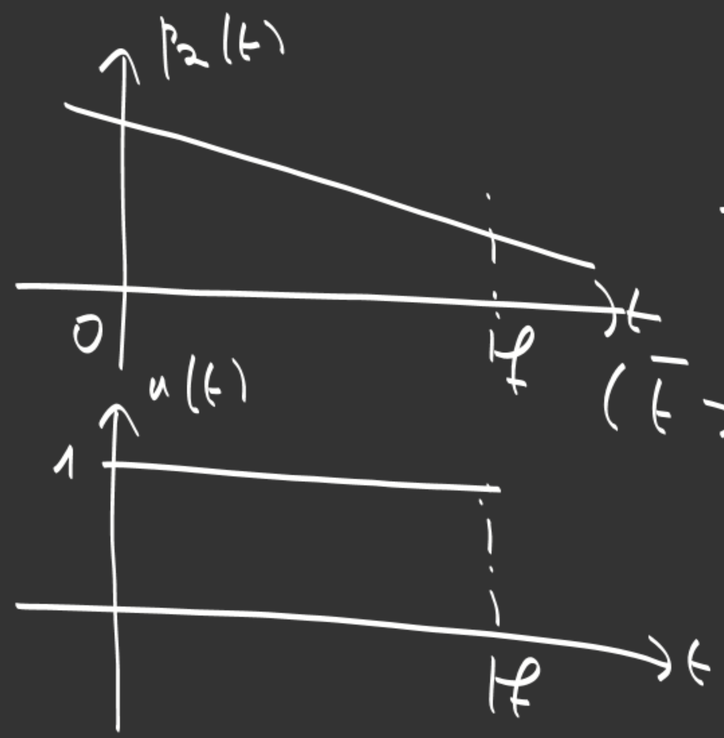
$\Rightarrow (p^0, p) = (0, 0)$: interdit ! $\quad +\infty$ libre

Donc, il existe au plus un temps $\bar{t} \in [0, t_f]$ tq $p_2(\bar{t}) = 0$.

Donc, $u(t) = \operatorname{sgn}(p_2(t))$, p.p. $t \in [0, t_f]$ si $p_2(t) \neq 0$







$\Rightarrow$ on a plus une commutation sur u : $u = +1/-1$ (ou) $u = -1/+1$ (ce qui inclut $u \equiv +1$ (ou) $u \equiv -1$)

On a donc deux cas ($+-/-+$) ; dans le premier, supposons qu'on commence par $u(t) = -1$, $t \in [0, \bar{t}]$:

$$u(t) = -1, \quad t \in [0, \bar{t}]$$

$$\Rightarrow \ddot{q}(t) = x_2(t) = u(t) = -1$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t) = \dot{q}_0 - t$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{1}{2} t^2$$

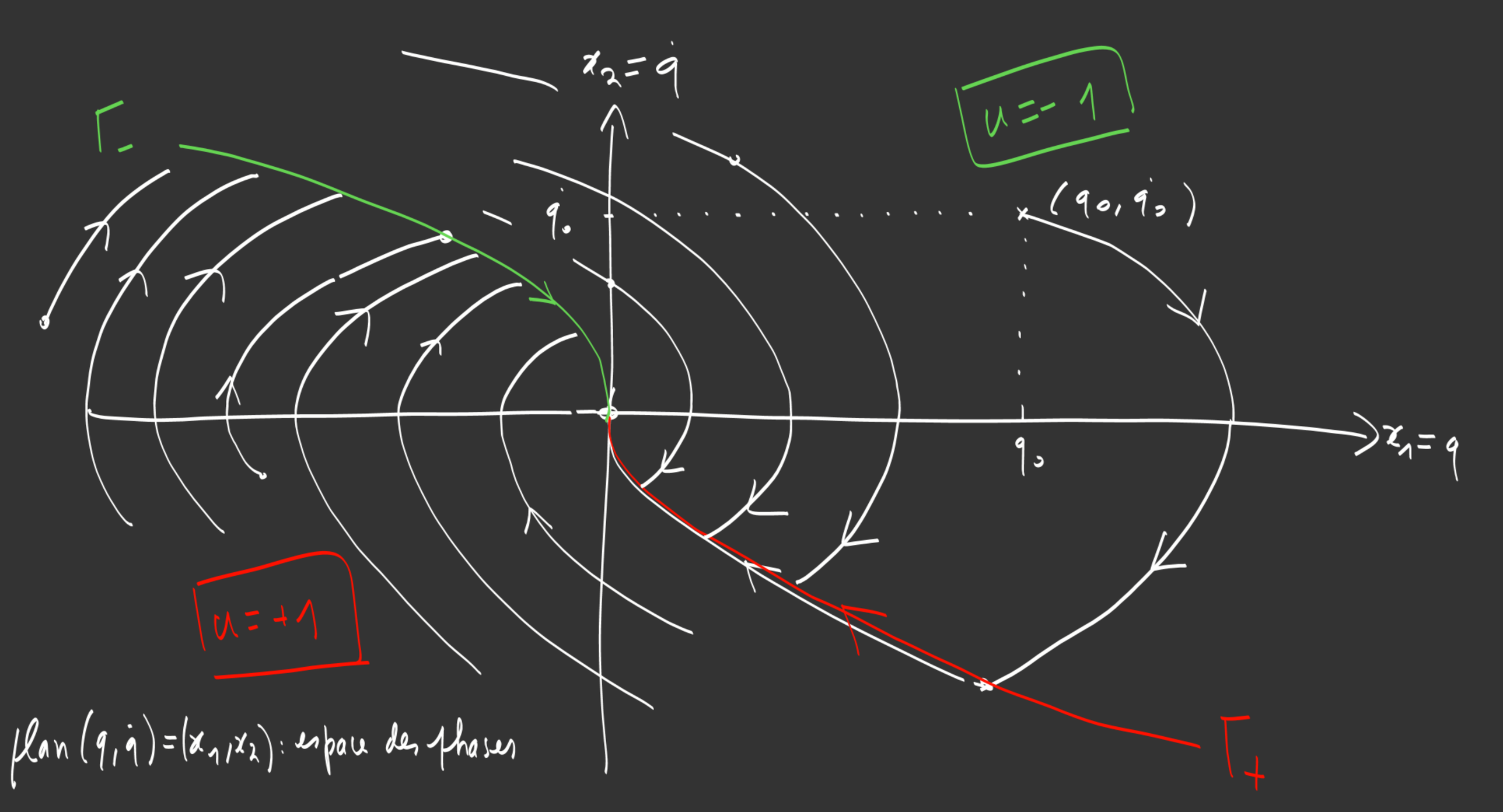
$$= q_0 - \frac{1}{2}(\dot{q}_0 - t)^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$

$$= q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 - \frac{1}{2}\dot{q}^2(t)$$

$$\Rightarrow q(t) + \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2$$: intégrale première "(= qté conservée au cours du temps) le long de l'arc $u \equiv -1$ (i.e. $t \in [0, \bar{t}]$)

$\Rightarrow$ la courbe paramétrée $t \mapsto \underbrace{(q(t), \dot{q}(t))}_{x(t)}$ décrit l'arc de parabole

$$q = -\frac{1}{2}\dot{q}^2 + q_0 + \frac{1}{2}\dot{q}_0^2 \quad \left(= -\frac{1}{2}\dot{q}^2 + cte\right)$$


$x_2 = \dot{q}$
Γ_-
$u = -1$
q_0
$(q_0, \dot{q}_0)$
q_0
$x_1 = q$
$u = +1$
Γ_+
plan $(q, \dot{q}) = (x_1, x_2)$: espace des phases

Par symétrie le cas +/- se traite de la même manière et on déduit un feuilletage du plan $(q, \dot{q})$: par chaque pt $x_0 = (q_0, \dot{q}_0)$ passe une et une seule courbe formée d'au plus deux arcs de paraboles connectant ce pt à $x_f = (0,0)$. Ayant admis l'existence de solution, il s'agit de la solution (unique). Reste à calculer $t_f = H_f(q_0, \dot{q}_0)$: calculer pour cela $\bar{t}(q_0, \dot{q}_0)$, dans les deux cas (ex 0).

Retour sur le PMP : démontrons le pt mentionné en remarque iv), à savoir la constance du hamiltonien évalué le long de $t \longmapsto (x(t), p(t), u(t))$. Soit donc u optimale et $(p^0, p) \neq (0,0)$ un couple associé par le PMP. On pose

$$h(\underbrace{z}_{z:=(x,p)}) := \max_{v \in \overline{\mathrm{Im}\, u}} H(\overline{z}, v) \quad \left(\mathrm{Im}\, u = u([0, t_f]) \subset U \right.$$

$$\left. \text{et } u \in L^\infty_m([0,t_f]) \Rightarrow \overline{\mathrm{Im}\, u} \text{ compact} \right)$$

(bien définie, cf. fonction continue sur compact).

Mq h est lipschitz : soient $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$h(z_1) - h(z_2) = \underbrace{H(z_1, u_1)}_{\exists u_1, u_2 \in \overline{\mathrm{Im}\, u}} - H(z_2, u_2) \leqslant H(z_1, u_1) - H(z_2, u_1)$$

$$\leqslant \max_{z \times \mathrm{Im}\, u} \left\| \frac{\partial H}{\partial z} \right\| \cdot \|z_1 - z_2\| \quad \text{cf. Acer. Finis}$$

(let Z compact $\supset z([0,t_f])$)

Quand $t \in [\bar{t}, t_f[$,

$$u(t) = 1 = \ddot{q}(t)$$

$$\Rightarrow \int_t^{t_f} \ddot{q}(s)\,ds = \dot{q}\Big]_t^{t_f} = s\Big]_t^{t_f}$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t_f) - \dot{q}(t) = t_f - t \qquad (\dot{q}(t_f) = 0)$$

$$\Rightarrow \dot{q}(t) = t - t_f \quad (\text{et } t_f \text{ inconnu})$$

$$\Rightarrow q(t_f) - q(t) = \int_t^{t_f} (s - t_f)\,ds \qquad (q(t_f) = 0)$$

$$= \frac{1}{2}(s - t_f)^2 \Big]_t^{t_f}$$

$$= -\frac{1}{2}(t - t_f)^2$$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{1}{2}(t - t_f)^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2(t)$$

$$\Rightarrow q(t) - \frac{1}{2}\dot{q}^2(t) = 0$$

la courbe paramétrée $t \mapsto x(t)$ décrit un arc de parabole d'équation $q = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ ∋ $(0,0)$.

Posons $\varphi(t) := h(z(t))$; comme h et z sont lipschitz, $\varphi = h \circ z$ aussi (on peut donc la dériver p.p. $t \in [0, H[$) et

$$H(\underbrace{x(t), p(t)}_{z(t)}, u(t)) \overset{(i)}{=} \varphi(t), \quad t \in [0, H[\ (\text{p.p.})$$: on a cette relation et φ dérivable sur $A \subset [0, H[$ avec $\mu_L({}^cA) = 0$.

Soit $t \in A$, m.q. $\dot\varphi(t) = 0$ $(\Leftrightarrow \varphi = cte, \text{ie } (\exists c \in \mathbb{R}) : H(z(t), u(t)) = c \text{ p.p. } t)$.

On, soit $s > t$,

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s-t} \geq \frac{H(z(s), u(t)) - H(z(t), u(t))}{s-t} \xrightarrow{s \to t} \frac{\partial H}{\partial z}(z(t), u(t)) \cdot \dot z(t) = \underbrace{(\nabla_x H(-) \mid \dot x(t))}_{\nabla_p H(x(t), p(t))} \underbrace{- \nabla_x H(-)}_{-\dot p(t)} + (\nabla_p H(-) \mid \dot p(t))$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \dot\varphi(t) \geq 0 \Rightarrow \dot\varphi(t) = 0$ (p.p. $s < t$). $\square$